

Initiation à la topologie algébrique, fibration de Hopf et surfaces de
Riemann de genre 1

Emeline LUIRARD
sous la direction de
Jean-Claude SIKORAV

Juin-Juillet 2016

Résumé

Ce document est le rapport d'un stage de première année effectué à l'École Normale Supérieure de Lyon, pendant 5 semaines, sous la direction de Jean-Claude SIKORAV. Sont ici présentés les bases de la topologie algébrique, un objet mathématique important, la fibration de Hopf, ainsi qu'une classification des surfaces de Riemann de genre 1.

Table des matières

Remerciements	3
1 Introduction	4
2 Introduction à la topologie algébrique	5
2.1 Surfaces	5
2.1.1 Définitions	5
2.1.2 Triangulation d'une surface compacte	6
2.1.3 Classification des surfaces fermées	6
2.2 Homotopie et groupe fondamental	9
2.2.1 Homotopie des chemins	9
2.2.2 Groupe fondamental ou groupe de Poincaré	10
2.3 Revêtements et relèvement	13
2.3.1 Revêtements	13
2.3.2 Relèvement	14
2.4 Théorème de Van Kampen	14
2.5 Quelques calculs de groupe fondamental	15
2.5.1 Outil préliminaire : rétraction par déformation	15
2.5.2 La droite \mathbb{R}	15
2.5.3 Le cercle	15
2.5.4 Le tore	17
2.5.5 Tore épointé	18
2.5.6 Une surface de genre 2	18
2.5.7 Une surface de genre g	18
3 Fibration de Hopf	20
3.1 Fibration	20
3.2 La fibration de Hopf	20
3.2.1 Introduction	20
3.2.2 Application de Hopf	21
3.2.3 Quelques propriétés	22
4 Classification des surfaces de Riemann de genre 1	24
4.1 Notions préliminaires et énoncé	24
4.1.1 Énoncé	24
4.1.2 Nouvelles notions	24
4.1.3 Formule d'indice de Poincaré-Hopf	25
4.2 Démonstration	26
4.2.1 Etape 1 : Existence d'une forme holomorphe qui ne s'annule jamais	26
4.2.2 Etape 2 : Construction d'un champ dual	26
4.2.3 Etape 3 : Action de \mathbb{C} sur S	27
4.2.4 Etape 4 : Les orbites sont ouvertes.	27
4.2.5 Etape 5 : Action transitive	27
4.2.6 Etape 6 : Bijection entre S et un quotient de \mathbb{C}	27
4.2.7 Etape 7 : Λ est discret	27
4.2.8 Etape 8 : Trois possibilités pour Λ	27

4.2.9	Etape 9 : π est un revêtement	28
4.2.10	Etape 10 : Λ est un réseau	28
Annexes		29
A	Tore, plan projectif et somme connexe	29
A.1	Le tore	29
A.2	Le ruban de Möbius	29
A.3	Le plan projectif	29
A.4	Somme connexe	29
B	Caractéristique d'Euler-Poincaré	30
C	Un peu de théorie des groupes	31
C.1	Action libre et propre	31
C.2	Produit libre	31
C.3	Produit amalgamé	31
C.4	Présentation d'un groupe	32
D	Lemmes utiles pour la démonstration du Théorème 4.1.1	33

Remerciements

Merci à l'*Ecole Normale Supérieure de Lyon* pour son accueil.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon stage et qui m'ont aidée lors de la rédaction de ce rapport.

Merci à M. Jean-Claude Sikorav, Professeur à l'*Ecole Normale Supérieure de Lyon*, d'avoir été mon maître de stage. Merci pour le temps qu'il m'a consacré à partager ses connaissances et diriger mon travail.

Merci aussi à M. Bruno Sevennec, chercheur à l'*UMPA*, pour toutes ses explications, et à M. Niels Borne, Professeur à l'*Université de Lille*, qui même si ce n'était pas son domaine a su m'éclairer sur plusieurs points.

Merci à M. Jeremy Leborgne, Professeur à l'*Ecole Normale Supérieure de Rennes*, pour son soutien et ses explications, et à M. Bruno Arzac, mon professeur de mathématiques de MP*, pour son soutien.

Merci enfin à toutes les personnes qui m'ont conseillée et relue lors de la rédaction de ce rapport de stage.

Chapitre 1

Introduction

La vision des surfaces par les mathématiciens a beaucoup évolué au cours du temps. Le but de ce stage est de découvrir la topologie algébrique ainsi que l'importance de la fibration de Hopf dans ce domaine. La topologie algébrique a pour but d'associer aux espaces topologiques des invariants algébriques permettant de les comparer. Cette association se fait au moyen d'objets que l'on appelle foncteurs qui font le lien entre les espaces topologiques et les groupes. Le fondateur de la topologie moderne est Henri Poincaré (1854- 1912) avec son *Analysis Situs*. On lui doit l'introduction de l'homologie et des groupes fondamentaux que nous étudierons.

Chapitre 2

Introduction à la topologie algébrique

2.1 Surfaces

Définissons tout d'abord les objets que nous étudierons : les surfaces.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1. Soient X et Y deux espaces topologiques. Un *homéomorphisme* est une bijection bicontinue entre X et Y . On dit alors que X et Y sont *homéomorphes*. Intuitivement, X et Y sont homéomorphes si l'un peut être déformé continûment pour former l'autre.

On peut désormais définir ce qu'est une surface :

Définition 2.1.2. Une *surface topologique* S est un espace topologique séparé connexe, tel que pour chaque point x de S , il existe un voisinage ouvert de x homéomorphe au plan \mathbb{R}^2 . On appelle *carte locale* (ou système de coordonnées locales) la donnée d'un voisinage et d'un tel homéomorphisme. Un *atlas* de S est une famille $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de cartes, dont les domaines U_i recouvrent S .

Des exemples-types de surfaces sont la sphère et le tore.

Cette définition peut se généraliser en dimensions supérieures, on définit ainsi les variétés topologiques de dimension n :

Définition 2.1.3. Un *variété topologique* X de dimension n est un espace topologique séparé tel que pour tout point x de X , il existe un voisinage ouvert de x homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .

Une surface est donc une variété topologique réelle connexe de dimension 2.

Définition 2.1.4. Considérons deux cartes (U_i, ϕ_i) , $i = 1, 2$, alors les points de $U_1 \cap U_2$ ont deux systèmes de coordonnées. Un *changement de carte* est la correspondance entre ces deux systèmes :

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

Regardons plus en détails les surfaces, il en existe différents types :

Définition 2.1.5. Une surface *à bord* est un espace topologique séparé connexe tel que pour chaque point, il existe un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert du demi-plan $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Un point envoyé sur la droite $\{0\} \times \mathbb{R}$ par une carte locale est appelé *point de bord* tandis que les autres points sont appelés *points intérieurs*.

Définition 2.1.6. On dira qu'une surface est *fermée* lorsqu'elle est compacte et sans bord.

C'est le cas, par exemple, de la sphère.

Définition 2.1.7. Un *lacet* dans S est une application continue $c : [0, 1] \rightarrow S$ telle que $c(0) = c(1)$.

Définition 2.1.8. Une surface est dite *orientable* si tous les lacets préservent l'orientation : l'orientation au départ et à l'arrivée est identique. Ainsi, un observateur bidimensionnel qui se déplace sur cette surface aura une notion de droite et de gauche. Au contraire, sur une surface non-orientable, notre observateur pourra trouver un chemin sur lequel sa gauche et sa droite seront échangées.

2.1.2 Triangulation d'une surface compacte

Définition 2.1.9. Une *triangulation* d'une surface compacte S est une famille finie d'ensembles fermés $\{T_1, \dots, T_n\}$ qui recouvre la surface. Chacun de ces ensembles est homéomorphe à un triangle de \mathbb{R}^2 . Notons ϕ_i un tel homéomorphisme. On appelle *triangles* les T_i , *côtés* les images réciproques des côtés des triangles de \mathbb{R}^2 par les ϕ_i et *sommets* les images réciproques des sommets des triangles de \mathbb{R}^2 .

Une triangulation doit respecter plusieurs règles, comme le montre le Figure 2.1. On demande que deux triangles distincts T_i et T_j soient disjoints, ou que leur intersection soit réduite à un côté ou à un sommet.

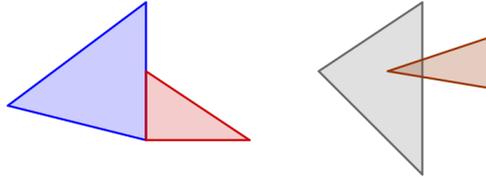


FIGURE 2.1 – Exemples de triangulations interdites.

La Figure 2.2 montre un exemple de triangulation, celle du tore.

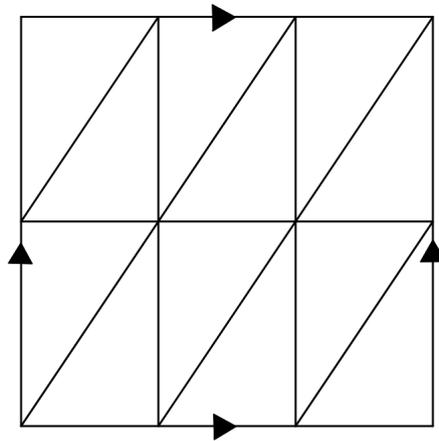


FIGURE 2.2 – Une triangulation du tore.

On a le théorème important :

Théorème 2.1.1 (Radó). Tout surface compacte admet une triangulation.

2.1.3 Classification des surfaces fermées

Il est possible de classifier topologiquement les surfaces. Mais on se restreindra aux surfaces fermées. Pour une classification des surfaces avec bord, voir [10, Section 10 p.37] pour la démonstration.

Nous avons vu deux exemples de surfaces : la sphère et le tore. Ces deux surfaces diffèrent par le fait que le tore possède un trou. Ainsi, si on trace une courbe fermée sur la sphère, i.e. un lacet, elle sera découpée en deux parties disjointes, comme le montre la Figure 2.3. Tandis qu'il est possible de tracer un lacet sur le tore qui ne le coupe pas en deux parties disjointes. Mais remarquons qu'on ne peut pas tracer deux lacets disjoints sans disconnecter le tore, comme le montre la Figure 2.4.

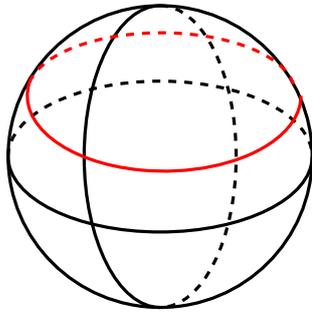


FIGURE 2.3 – Un lacet suffit à disconnecter la sphère.

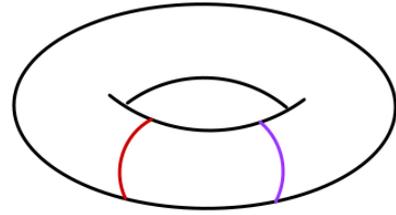


FIGURE 2.4 – Un seul des deux lacets ne disconnecte pas le tore mais la réunion des deux lacets le disconnecte.

Ceci apporte une des définitions du genre :

Définition 2.1.10. Le *genre* d'une surface est le nombre maximum de courbes fermées simples disjointes que l'on peut tracer sur cette surface sans la disconnecter. Intuitivement, c'est le nombre de trous dans la surface.

Le genre est un invariant topologique. Ainsi pour prouver que deux surfaces ne sont pas homéomorphes, il suffit de montrer qu'elles n'ont pas le même genre. Par exemple, le tore, qui est de genre 1, n'est pas homéomorphe à la sphère, qui est de genre 0.

En outre, on peut construire une surface de genre g à partir d'une opération qui s'appelle la somme connexe. Prenons deux surfaces connexes S_1 et S_2 , on construit la somme connexe $S_1 \# S_2$ de S_1 et S_2 en enlevant un petit disque de chaque surface et en collant nos deux surfaces le long des bords de ces disques. Le processus est décrit précisément en annexe A. De cette manière, une surface à g trous (qui sera de genre g) est le somme connexe de g tores.

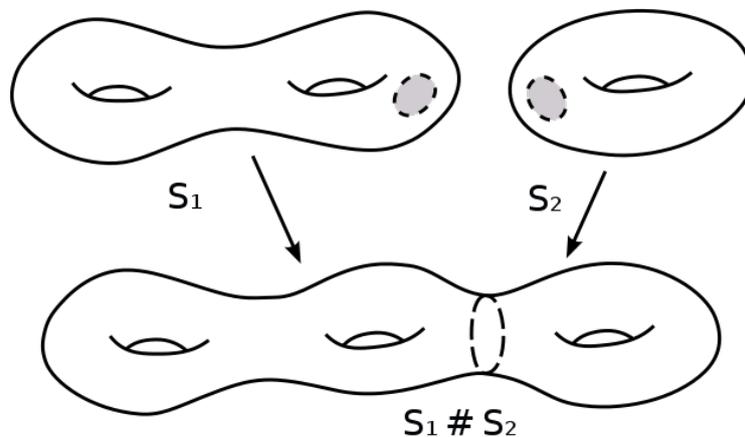


FIGURE 2.5 – La somme connexe d'une surface de genre 2 et d'un tore donne une surface de genre 3.

On a ainsi obtenu une première classe de surfaces. Pour en construire une autre, prenons le ruban de Möbius, la définition se trouve en annexe A. On constate qu'il n'appartient pas à la première famille car il admet un bord mais aussi parce qu'il n'est pas orientable. En effet si on considère un insecte plat qui se déplace le long du ruban de Möbius, après avoir fait un tour, sa gauche et sa droite seront échangées. Considérons, sur la Figure 2.6, que la droite est indiquée par la flèche. Alors on voit bien qu'après un tour, la flèche pointe dans la direction opposée à celle de départ.

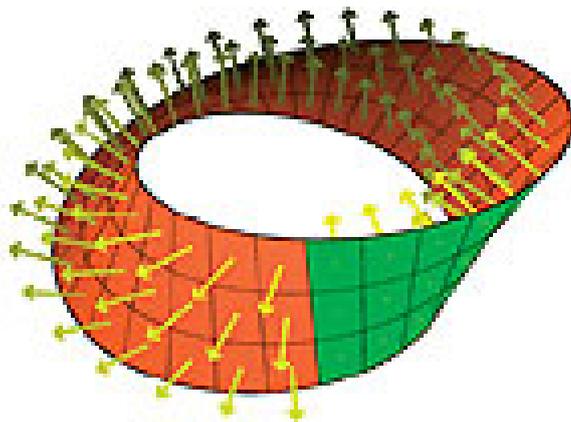


FIGURE 2.6 – Après un tour du ruban de Möbius, la gauche et la droite sont échangées.

Les surfaces vérifiant cette propriété sont non-orientables. On obtient ainsi une autre définition de l'orientabilité, qui peut en fait découler en tant que propriété de notre définition de départ :

Définition 2.1.11. On dit qu'une surface est *orientable* si elle ne contient pas de ruban de Möbius et non-orientable si elle en contient un.

Revenons à nos classes de surfaces. On peut construire une nouvelle surface sans bord en collant un disque le long du bord du ruban de Möbius. On a ainsi construit ce qu'on appelle le plan projectif réel, noté \mathbb{P}^2 , cf annexe A pour plus de détails.

Comme nous le voyons sur la Figure 2.7, le plan projectif contient un ruban de Möbius, il est donc non-orientable.

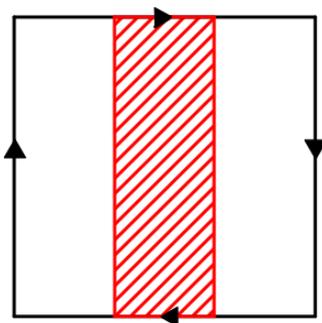


FIGURE 2.7 – Le plan projectif contient un ruban de Möbius.

A partir de ce plan projectif, on peut alors construire d'autres surfaces qui sont, elles aussi, non-orientables :

$$P_k = \mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2.$$

On obtient le théorème :

Théorème 2.1.2 (Théorème de classification des surfaces fermées). Toute surface fermée, est homéomorphe à l'un de ces trois types de surface :

1. la sphère \mathbb{S}^2 ,
2. la somme connexe S_g de g tores, $g \geq 1$,
3. la somme connexe P_k de k plans projectifs, $k \geq 1$.

Ces trois familles sont différentes les unes des autres.

Les deux premières classes forment les surfaces orientables, tandis que la dernière rassemble les surfaces non-orientables.

Démonstration. La démonstration utilise la triangulation des surfaces. Voir [17] ou [10, Section 5 p.11]. \square

Une question se pose : qu'en est-il des surfaces de la forme $S_g \# \mathbb{P}$? On peut montrer que la somme connexe d'un tore et d'un plan projectif est homéomorphe à la somme connexe de trois plans projectifs. Voir [10, Section 7 p.26]. Elles font donc partie de la troisième famille.

On remarque que ces trois familles sont bien différentes :

	sphère	g-tores	g-plans projectifs
Orientable	Oui		Non
Genre	0	g	

On a ainsi une classification selon l'orientabilité et le genre des surfaces. Nous aurions aussi pu utiliser la caractéristique d'Euler à la place du genre pour classifier ces surfaces. Cette dernière est définie en annexe B.

Il est aussi possible de classifier les variétés de dimension supérieure mais nous ne nous y intéresserons pas.

2.2 Homotopie et groupe fondamental

Au paragraphe précédent, nous avons pu classifier les surfaces. Cependant l'orientabilité et le genre ne suffisent pas à classifier les variétés de dimensions supérieures. C'est la raison pour laquelle Henri Poincaré a introduit la notion de groupe fondamental, aussi appelé groupe de Poincaré ou premier groupe d'homologie. Nous nous intéresserons à cet objet sans aller jusqu'à la classification des variétés en dimension supérieure.

2.2.1 Homotopie des chemins

Soit S une surface.

Définition 2.2.1. Un *chemin* dans S est une application continue $f : [0, 1] \rightarrow S$. Si $x = f(0)$ et $y = f(1)$, on dit que f est un chemin joignant x à y .

Le *chemin constant* en x est défini par : $\forall t \in [0, 1], e_x(t) = x$.

Définition 2.2.2. Soient $x, y \in S$. Deux chemins $f_0, f_1 : [0, 1] \rightarrow S$ sont dits *homotopes* si $f_0(0) = f_1(0) = x$, $f_0(1) = f_1(1) = y$ et il existe une application $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$ continue telle que :

$$F(0, \cdot) = f_0, F(1, \cdot) = f_1, \forall s \in [0, 1], F(s, 0) = x, F(s, 1) = y.$$

On dit que H est une *homotopie*. Intuitivement, un chemin f_0 est homotope à un chemin f_1 s'il peut être déformé continûment en le chemin f_1 .

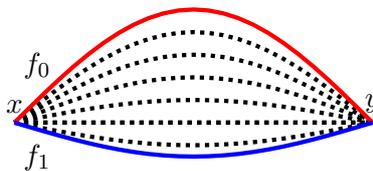


FIGURE 2.8 – Homotopie entre deux chemins.

On peut généraliser cette définition pour des applications continues de X dans Y : f est homotope à g s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que

$$\forall x \in X, H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x).$$

La relation "être homotope à" entre les chemins est appelée relation d'homotopie. Cela définit une relation d'équivalence sur les chemins :

- réflexive : Soit f_0 un chemin de x vers y . Clairement, l'application
$$H : \begin{matrix} [0, 1] \times [0, 1] & \rightarrow & S \\ s, t & \mapsto & f_0(t) \end{matrix}$$
 est une homotopie de f_0 sur lui-même.

- symétrique : Soient f_0 et f_1 deux chemins de x vers y . Supposons que f_0 soit homotope à f_1 . Alors il existe une homotopie H de f_0 vers f_1 . Posons :

$$H^* : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$$

$$s, t \mapsto H(1 - s, t).$$

H^* est continue puisque H l'est ; $H^*(0, \cdot) = H(1, \cdot) = f_1$, $H^*(1, \cdot) = H(0, \cdot) = f_0$. Et $\forall s \in [0, 1]$, $H^*(s, 0) = H(1 - s, 0) = x$, $H^*(s, 1) = H(1 - s, 1) = y$.

- transitive : Soient f_0 , f_1 , et f_2 trois chemins joignant x à y . Supposons que f_0 et f_1 soient homotopes, on notera H une telle homotopie, et que f_1 et f_2 le soient aussi, on notera G une telle homotopie. Posons

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$$

$$s, t \mapsto \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Alors F est continue car $H(1, \cdot) = G(0, \cdot)$, et on a $F(0, \cdot) = H(0, \cdot) = f_0$, $F(1, \cdot) = G(1, \cdot) = f_2$,

$$F(s, 0) = \begin{cases} H(2s, 0) = x & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, 0) = x & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \text{ et } F(s, 1) = \begin{cases} H(2s, 1) = y & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, 1) = y & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Donc F est une homotopie entre f_0 et f_2 .

Un lacet étant un chemin tel que $f(0) = f(1)$, on peut définir opération sur l'ensemble des lacets ayant pour point de départ et d'arrivée $x \in S$ et deux lacets particuliers :

Soient deux lacets c_0 et c_1 sur S de base x .

- Le produit de ces deux lacets est le lacet obtenu en suivant le lacet c_0 puis le lacet c_1 :

$$c_0 \cdot c_1 : [0, 1] \rightarrow S$$

$$t \mapsto \begin{cases} c_0(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ c_1(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

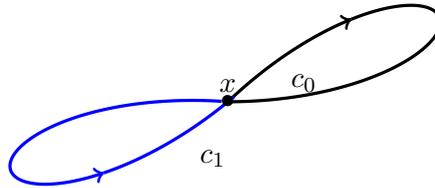


FIGURE 2.9 – Produit de deux lacets.

Cette application est bien définie et continue car $c_0(1) = c_1(0)$.

- Le lacet c parcouru dans le sens inverse : $c^{-1}(t) = c(1 - t)$ pour $t \in [0, 1]$.
- Le lacet e_x constant égal à x .

2.2.2 Groupe fondamental ou groupe de Poincaré

A partir de la relation d'homotopie entre les lacets, on peut définir :

Définition 2.2.3. Le *groupe fondamental* de S en un point $x \in S$ est l'ensemble des classes d'homotopies de lacets basés en x . On le note $\pi_1(S, x)$.

Pour montrer que cela définit bien un groupe, il faut montrer que l'opération de groupe définie précédemment passe bien au quotient :

Soient f_0 , f_1 , g_0 , g_1 quatre lacets basés en x . Supposons que f_0 et f_1 soient dans la même classe d'équivalence, et que g_0 et g_1 soient dans une autre même classe d'équivalence. Notons F la première homotopie et G la deuxième. On cherche une homotopie joignant $f_0 \cdot g_0$ à $f_1 \cdot g_1$. Posons :

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$$

$$s, t \mapsto \begin{cases} F(s, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(s, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Alors, de la même manière que précédemment, on montre que H définit bien une homotopie de $f_0 \cdot g_0$ vers $f_1 \cdot g_1$. On peut donc définir le produit de deux classes comme étant la classe du produit.

Le produit ainsi défini munit $\pi_1(X, x)$ d'une structure de groupe :

— associativité : Soient f, g, h trois lacets en x . Alors, comme on le voit sur la Figure 2.10, on a $f \cdot (g \cdot h) \sim (f \cdot g) \cdot h$.

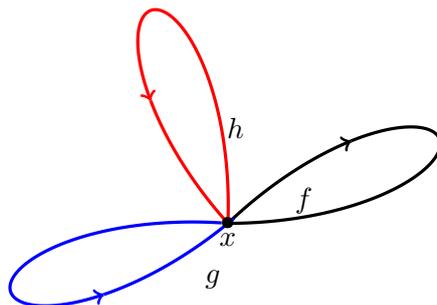


FIGURE 2.10 – Associativité du produit.

— élément neutre : Soit f un lacet en x . Trouvons une homotopie de f vers $e_x \cdot f$. Posons :

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$$

$$s, t \mapsto \begin{cases} x & \text{si } t \in [0, \frac{s}{2}] \\ f(\frac{2t-s}{2-s}) & \text{si } t \in [\frac{s}{2}, 1]. \end{cases}$$

Alors $H(0, \cdot) = f$, $H(1, \cdot) = e_x \cdot f$ et $H(\cdot, 0) = H(\cdot, 1) = x$. De même, on peut trouver une homotopie de f vers $f \cdot e_x$. Donc la classe d'équivalence de e_x est bien un élément neutre pour la multiplication :

$$[f] \cdot [e_x] = [f] = [e_x] \cdot [f].$$

— inverse : Soit f un lacet basé en x , son inverse a été défini précédemment : pour $t \in [0, 1]$, $f^{-1}(t) = f(1-t)$. Posons :

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$$

$$s, t \mapsto \begin{cases} f(2st) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2(1-t)s) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Alors $H(0, \cdot) = e_x$, $H(1, \cdot) = f \cdot f^{-1}$ et $H(\cdot, 0) = H(\cdot, 1) = x$. H définit bien une homotopie de $f^{-1} \cdot f$ vers e_x . De la même manière, on peut trouver une homotopie de e_x vers $f^{-1} \cdot f$. Donc chaque élément possède un inverse pour ce produit :

$$[f] \cdot [f^{-1}] = [e_x] = [f^{-1}] \cdot [f].$$

En conclusion, $\pi_1(X, x)$ est bien un groupe pour ce produit.

Le point de base semble jouer un rôle important dans la définition du groupe fondamental. On va donc chercher à savoir l'importance qu'a un changement de point sur le groupe fondamental.

Dans le cas d'un espace connexe par arcs, ce groupe ne dépend pas du choix du point x .

En effet, soit X une surface connexe par arcs. Soient $x_0, x_1 \in X$. On sait qu'il existe un chemin $f : [0, 1] \rightarrow X$ continue tel que $f(0) = x_0$ et $f(1) = x_1$. Notons f^* le chemin inverse. Soit c_0 un lacet basé en x_0 . Posons $c_1 = f \cdot c_0 \cdot f^*$. Alors, $c_1(0) = c_1(1) = x_1$.

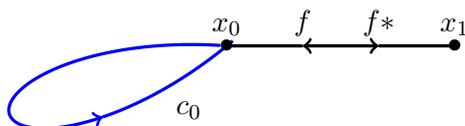


FIGURE 2.11 – Chemin c_1 .

Posons

$$F : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$[c_0] \mapsto [c_1] = [f \cdot c_0 \cdot f^*].$$

F est bien définie et indépendante du représentant :

Si c_0 est homotope à c'_0 , il existe une homotopie H du premier vers le second. Notons $c_1 = F(c_0)$ et $c'_1 = F(c'_0)$. Posons :

$$G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

$$(s, t) \mapsto f \cdot H(s, t) \cdot f^* .$$

Ceci définit une homotopie entre c_1 et c'_1 : $G(0, \cdot) = f \cdot H(0, \cdot) \cdot f^* = f \cdot c_0 \cdot f^* = c_1$, et de la même manière, $G(1, \cdot) = c'_1$ et $G(\cdot, 0) = G(\cdot, 1) = x_1$. Donc $[c_1] = [c'_1]$.

C'est un homomorphisme : $F([c] \cdot [d]) = F([cd]) = [f \cdot c \cdot d \cdot f^*] = [f \cdot c \cdot f^* \cdot f \cdot d \cdot f^*] = [f \cdot c \cdot f^*] \cdot [f \cdot d \cdot f^*] = F([c]) \cdot F([d])$.

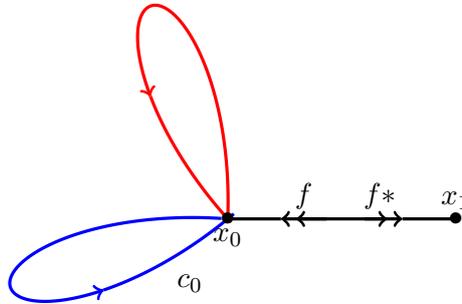


FIGURE 2.12 – F est un homomorphisme.

Et on peut vérifier que

$$F^* : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$[c_1] \mapsto [f^* \cdot c_1 \cdot f]$$

est l'inverse de F .

Donc F est un isomorphisme de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\pi_1(X, x_1)$. Par conséquent, lorsque X est connexe par arcs, $\pi_1(X, x)$ est indépendant de x , on le notera $\pi_1(X)$.

On peut voir, à l'aide de cette démonstration, que si on suppose seulement qu'il y ait un chemin entre deux points fixés x et y , il y a alors un isomorphisme entre les groupes fondamentaux correspondant.

Intéressons-nous maintenant à quelques propriétés du groupe fondamental :

Définition 2.2.4. Lorsque S est connexe par arcs et $\pi_1(S)$ est trivial, i.e. tout lacet basé en x_0 est homotope au chemin trivial e_{x_0} , on dit que S est *simplement connexe*.

Exemple : On dit qu'un espace topologique X est *contractile* si $X \neq \emptyset$ et si l'application Id_X est homotope à une application constante. Pour $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^n est contractile car convexe. Tout espace contractile est simplement connexe. Cela découle de la proposition :

Proposition 2.2.1. Soient X et Y deux surfaces et $(x_0, y_0) \in X \times Y$. S'il existe une application $f : X \rightarrow Y$ continue telle que $f(x_0) = y_0$, alors il existe un homomorphisme $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

Faisons remarquer que f_* n'est pas le même morphisme que précédemment.

Démonstration. Soit $[a] \in \pi_1(X, x_0)$. Notons a un représentant de cette classe. $a : [0, 1] \rightarrow X$ est un lacet en x_0 . Or $f \circ a$ est un lacet en y_0 . Posons $f_* : [a] \mapsto [f \circ a]$. Alors, pour $[a], [b] \in \pi_1(X, x_0)$, $f_*([a] \cdot [b]) = f_*([a \cdot b]) = [f \circ (a \cdot b)] = [f \circ a \cdot f \circ b] = [f \circ a] \cdot [f \circ b] = f_*([a]) \cdot f_*([b])$ et $f_*([e_{x_0}]) = [f \circ e_{x_0}] = [e_{y_0}]$. \square

Lemme 2.2.1. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des applications continues, avec $f(x_0) = y_0$ et $g(y_0) = z_0$, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Et l'identité sur X , $Id : X \rightarrow X$, induit l'identité sur $\pi_1(X, x_0)$, $Id : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) : Id_* = Id$.

Démonstration. Soit $[a] \in \pi_1(X, x_0)$, notons a un représentant de la classe. Alors $(g \circ f)_*([a]) = [g \circ f \circ a] = g_*([f \circ a]) = g_* \circ f_*([a])$. En effet, $f \circ a$ est un lacet dans Y , basé en y_0 .

La deuxième partie est évidente. \square

Notre foncteur est ici : $F : \text{Espaces topologiques} \rightarrow \text{Groupes}$ tel que $F((X, x_0)) = \pi_1(X, x_0)$ et $F(f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)) = f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

Le groupe fondamental permet aussi de classifier les surfaces :

Théorème 2.2.1. Soient X et Y connexes par arcs. Si $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ ne sont pas isomorphes, alors X et Y ne sont pas homéomorphes.

Démonstration. Par contraposée, supposons que X et Y soient homéomorphes. Notons f cet homéomorphisme et f^{-1} son inverse. D'après le lemme, $f_* \circ f_*^{-1} = (f \circ f^{-1})_* = Id_* = Id$. Donc f_* est un isomorphisme de $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$. \square

Le groupe fondamental est donc un invariant par homéomorphisme.

Proposition 2.2.2. Soient X et Y deux espaces topologiques et $(x, y) \in X \times Y$. Alors $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ est isomorphe à $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$.

Démonstration. Notons p et q les projections de $X \times Y$ sur X et Y . Posons $\phi = (p_*, q_*) : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$. ϕ est clairement un morphisme de groupes.

Injectivité : Si $\phi([a, b]) = 0$, il existe des homotopies A et B reliant respectivement a à e_x et b à e_y . Alors (A, B) est une homotopie entre (a, b) et (e_x, e_y) .

Surectivité : Pour a et b deux lacets basés respectivement en x et y , $\phi([a], [b]) = ([a], [b])$.

Donc ϕ est un isomorphisme. \square

2.3 Revêtements et relèvement

2.3.1 Revêtements

On considère des espaces topologiques séparés.

Définition 2.3.1. Un *revêtement* de X est la donnée d'un espace E et d'une application continue $p : E \rightarrow X$ vérifiant : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x de x tel que $p^{-1}(V_x)$ soit une union disjointe d'ouverts U_i et $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V_x$ un homéomorphisme pour tout i .

X s'appelle la *base du revêtement*, E l'*espace total*, U_i les *feuilles* et V_x des ouverts *trivialisants*.

Proposition 2.3.1. Si p est un revêtement alors,

- p est un homéomorphisme local en tout point.
- p est surjective.
- Pour tout $x \in X$, $p^{-1}(x)$, la fibre de p au dessus de x , est un sous espace discret de E .

Démonstration. Voir [1, p.36]. \square

Théorème 2.3.1. Si un groupe discret Λ agit proprement et librement sur un espace localement compact X , l'application $\pi : X \rightarrow X/\Lambda$ est un revêtement.

Démonstration. Voir [8, p. 80] \square

Exemple : L'application $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ $x \mapsto e^{2i\pi x}$ est un revêtement de \mathbb{S}^1 . Ce revêtement est souvent représenté comme sur la Figure 2.13.

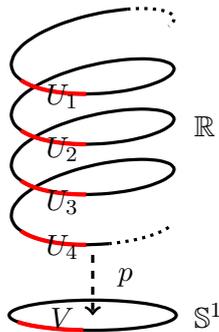


FIGURE 2.13 – Revêtement du cercle

2.3.2 Relèvement

Définition 2.3.2. On dit que l'application $f : Y \rightarrow X$ satisfait la propriété de *relèvement des chemins* si, pour tout chemin $c : [0, 1] \rightarrow X$ basé en x_0 , il existe un unique chemin \tilde{c} basé en $y_0 \in f^{-1}(x_0)$ tel que $f \circ \tilde{c} = c$.

Théorème 2.3.2 (Théorème de relèvement des chemins). Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement, b un point de B , x un point de la fibre de b . Pour tout chemin $c : [0, 1] \rightarrow B$ tel que $c(0) = b$, il existe un unique chemin $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow E$ tel que $\tilde{c}(0) = x$ et $p \circ \tilde{c} = c$.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{c} & B \\ \tilde{c} \downarrow & \nearrow p & \\ E & & \end{array}$$

Démonstration. Voir [16, p.21]. □

Théorème 2.3.3 (Théorème de relèvement des homotopies). Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement, b un point de B , x un point de la fibre de b . Pour toute homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$ tel que $H(0, 0) = b$, il existe un unique $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$ tel que $\tilde{H}(0, 0) = x$ et $p \circ \tilde{H} = H$.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B \\ \tilde{H} \downarrow & \nearrow p & \\ E & & \end{array}$$

Démonstration. Voir [1, p.45]. □

2.4 Théorème de Van Kampen

Le théorème de Van Kampen indique comment calculer le groupe fondamental d'un espace qui se décompose en espaces plus simples dont les groupes fondamentaux sont déjà connus.

Soit X un espace connexe par arcs tel que $X = X_1 \cup X_2$ avec X_1 et X_2 ouverts non vides connexes par arcs et tels que $X_0 = X_1 \cap X_2$ soit non vide et connexe par arcs. Le "non vide" pour X_0 est toujours vrai puisque X est connexe. Les espaces étant tous connexes, on prendra la notation $\pi_1(Y)$ avec Y un des ensembles définis précédemment, sans préciser le point de base.

Notons α_i l'homomorphisme de $\pi_1(X_0)$ dans $\pi_1(X_i)$ induit par l'injection de X_0 dans X_i , $i = 1; 2$, et β_i le morphisme de $\pi_1(X_i)$ dans $\pi_1(X)$ induit par l'injection de X_i dans X , $i = 0; 1; 2$.

On obtient alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1) & \xrightarrow{\beta_1} & \pi_1(X) \\ \alpha_1 \uparrow & \nearrow \beta_0 & \uparrow \beta_2 \\ \pi_1 X_0 & \xrightarrow{\alpha_2} & \pi_1(X_2) \end{array}$$

D'après la propriété universelle du produit amalgamé, cf annexe C, il existe un unique morphisme $\phi : \pi_1(X_1) \star_{\pi_1(X_0)} \pi_1(X_2) \rightarrow \pi_1(X)$:

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(X) \\ & \xrightarrow{\beta_1} & \nearrow \phi \\ \pi_1(X_1) & \xrightarrow{I_1} & \pi_1(X_1) \star_{\pi_1(X_0)} \pi_1(X_2) \\ \alpha_1 \uparrow & & \uparrow I_2 \\ \pi_1(X_0) & \xrightarrow{\alpha_2} & \pi_1(X_2) \end{array}$$

Théorème 2.4.1 (Van Kampen). ϕ est un isomorphisme. Autrement dit, le groupe fondamental de X est le produit libre des groupes fondamentaux de X_1 et de X_2 quotienté par la relation qui identifie les classes des lacets de X_0 :

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(X_1) \star_{\pi_1(X_0)} \pi_1(X_2).$$

Démonstration. Voir [5, p.44] et [16, p.14] qui est plus détaillée pour la surjectivité. □

(cf annexe C : produit libre et produit amalgamé)

Corollaire 2.4.2. Si X_0 est simplement connexe alors $\pi_1(X)$ est isomorphe au produit libre $\pi_1(X_1) \star \pi_1(X_2)$.

2.5 Quelques calculs de groupe fondamental

Nous allons maintenant déterminer le groupe fondamental sur quelques exemples. Le calcul du groupe fondamental du cercle est un calcul important.

2.5.1 Outil préliminaire : rétraction par déformation

Pour ce faire, nous avons tout d'abord besoin d'une notion : la rétraction par déformation.

Définition 2.5.1. Un sous espace Y d'un espace X est un *rétracte par déformation* de X s'il existe une application continue $r : X \rightarrow Y$ telle que $r|_Y = Id_Y$ et une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ telles que :

- $H(x, 0) = x$ pour tout $x \in X$,
- $H(x, 1) = r(x)$ pour tout $x \in X$.

H est en fait une homotopie entre l'application identité de X et l'application r . On dit alors que r est une *rétraction par déformation* de X sur Y .

Proposition 2.5.1. Soient Y un sous espace d'un espace X , i l'injection de Y dans X et $y \in Y$. Si Y est un rétracte par déformation de X , le morphisme induit $i_* : \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, y)$ est alors un isomorphisme.

Démonstration. Notons r une rétraction par déformation de X sur Y et H l'homotopie associée. Alors $r \circ i = Id$, d'où $r_* \circ i_* = Id_*$, ce qui implique que i_* est injectif. Et pour c un lacet sur X basé en $x_0 \in Y$, l'application $H(c, \cdot)$ est une homotopie de c sur un lacet de Y basé en x_0 . i_* est donc aussi surjectif. □

2.5.2 La droite \mathbb{R}

Nous avons vu précédemment la notion d'espace contractile. Ceci nous donne le résultat de cette partie mais voyons quand même une autre démonstration :

Proposition 2.5.2. L'espace topologique \mathbb{R} est simplement connexe.

Démonstration. Soit $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un lacet. Choisissons le de base 0, \mathbb{R} étant connexe par arcs, le point de base n'importe pas. Notons $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $H(t, s) = sc(t)$. H est continue. On a, pour $s \in [0, 1]$, $H(0, s) = sc(0) = 0$ et $H(1, s) = sc(1) = 0$. De plus, pour $t \in [0, 1]$, $H(t, 0) = e_0$ et $H(t, 1) = c(t)$. Donc H est une homotopie entre le chemin c et le chemin constant e_0 . \mathbb{R} est donc simplement connexe. □

De là, on peut démontrer que :

Proposition 2.5.3. L'espace topologique \mathbb{R}^n est simplement connexe, pour $n \geq 1$.

Démonstration. D'après la partie précédente, $\pi_1(\mathbb{R}^n) \simeq \pi_1(\mathbb{R})^n$. Or le groupe fondamental de \mathbb{R} étant trivial, celui de \mathbb{R}^n l'est aussi. □

2.5.3 Le cercle

Cet exemple est important dans la théorie du groupe fondamental, on le réutilise souvent. Pour trouver le groupe fondamental du cercle, on va utiliser le nombre de tours de cercle que fait un lacet.

\mathbb{S}^1 étant connexe par arcs, on peut prendre n'importe quel point de base sur le cercle. Choisissons 1 comme point de base.

Lemme 2.5.1. Soit X un espace compact et Y un espace topologique. Une application $f : X \rightarrow Y$ continue bijective est un homéomorphisme.

Démonstration. Soit F un fermé de X , c'est donc un compact. Or f est continue, d'où $f(F)$ est compacte, c'est à dire $(f^{-1})^{-1}(F)$ est compacte donc fermé. Donc f^{-1} est continue. \square

Notons $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ l'application continue $t \mapsto e^{2i\pi t}$. On a la diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^1 \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{p} & \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & & \end{array}$$

\tilde{p} est continue bijective or \mathbb{R}/\mathbb{Z} est compacte car image par l'application continue π du compact $[0, 1]$, d'où \tilde{p} est un homéomorphisme. \mathbb{R}/\mathbb{Z} est donc homéomorphe à \mathbb{S}^1 .

Posons $\gamma_n(t) = p(nt) = e^{2i\pi nt}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Soit c un lacet basé en 1 dans \mathbb{S}^1 . Par théorème de relèvement des lacets, il a un unique relèvement \tilde{c} dans \mathbb{R} d'origine 0, tel que $p \circ \tilde{c} = c$. Or $\tilde{c}(1) \in \mathbb{R}$ et $p \circ \tilde{c}(1) = c(1) = 1$, d'où $\tilde{c}(1) \in \mathbb{Z}$. On appelle cet entier le *degré* du lacet. Intuitivement, cela correspond au nombre de tours de cercle que fait le lacet, compté algébriquement. Par exemple, le degré de γ_n est n .

On veut donc définir l'application :

$$\begin{aligned} \text{deg} : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [c] &\mapsto \tilde{c}(1). \end{aligned}$$

Lemme 2.5.2. Les lacets d'une même classe d'homotopie ont le même degré.

Démonstration. Soient c_0 et c_1 deux lacets homotopes. Notons H une homotopie entre les deux. D'après la propriété de relèvement des homotopies, il existe un unique relèvement \tilde{H} dans \mathbb{R} d'origine 0, tel que $p \circ \tilde{H} = H$. Or $p \circ \tilde{H}(\cdot, 1) = H(\cdot, 1) = 1$ d'où $\forall s \in [0, 1], \tilde{H}(s, 1) \in \mathbb{Z}$. En outre, $\tilde{H}|_{\{1\} \times [0, 1]}$ est continue. Elle est continue et à valeurs dans \mathbb{Z} donc constante.

De plus $p \circ \tilde{H} = H$, d'où $p \circ \tilde{H}(i, \cdot) = H(i, \cdot) = c_i, i = 0; 1$. Or il existe un unique relèvement tel que $p \circ \tilde{c}_i = c_i, i = 0; 1$. Donc \tilde{H} est une homotopie entre \tilde{c}_0 et \tilde{c}_1 et $\tilde{H}(0, 1) = \tilde{H}(1, 1)$, i.e. $\tilde{c}_0(1) = \tilde{c}_1(1)$. Donc c_0 et c_1 sont de même degré. \square

L'application est donc bien définie. De plus, c'est un homomorphisme :

Lemme 2.5.3. Soient c_0 et c_1 deux lacets de base 1 dans \mathbb{S}^1 . Alors $\text{deg}(c_0 \cdot c_1) = \text{deg}(c_0) + \text{deg}(c_1)$.

Démonstration.

$$\forall t \in [0, 1], \quad c_0 \cdot c_1(t) = \begin{cases} c_0(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ c_1(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Notons \tilde{c}_i le relèvement associé au lacet $c_i, i = 0; 1$. Posons

$$c_3(t) = \begin{cases} \tilde{c}_0(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tilde{c}_1(2t - 1) + \tilde{c}_0(1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Alors,

$$\forall t \in [0, \frac{1}{2}], \quad p \circ c_3(t) = p \circ \tilde{c}_0(2t) = c_0(2t).$$

Et

$$\forall t \in [\frac{1}{2}, 1], \quad p \circ c_3(t) = p \circ (\tilde{c}_0(1) + \tilde{c}_1(2t - 1)) = e^{2i\pi \tilde{c}_0(1)} p \circ \tilde{c}_1(2t - 1) = p \circ \tilde{c}_1(2t - 1) = c_1(2t - 1).$$

Donc $p \circ c_3 = \tilde{c}_0 \cdot \tilde{c}_1$. d'où par unicité du relèvement d'un lacet, c_3 est l'unique relèvement du lacet $c_0 \cdot c_1$ dans \mathbb{R} . Et $c_3(1) = \tilde{c}_0(1) + \tilde{c}_1(1)$. \square

On peut donc désormais démontrer que :

Proposition 2.5.4. Le groupe fondamental du cercle \mathbb{S}^1 est isomorphe à \mathbb{Z} .

Démonstration. Il nous reste à montrer que l'application deg est un isomorphisme.

Elle est surjective car tout lacet $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\tilde{c}(0) = 0$ et $\tilde{c}(1) \in \mathbb{Z}$ donne un lacet $p \circ \tilde{c}$ basé en 1.

Elle est injective : si le relèvement \tilde{c} associé à c s'annule en 1, alors l'application

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (s, t) \mapsto t\tilde{c}(s)$$

définit une homotopie du lacet \tilde{c} , basé en 0, vers le lacet constant e_0 dans \mathbb{R} . Donc $F(s, t) = p(t\tilde{c}(s))$ est une homotopie de c vers le lacet trivial e_1 de \mathbb{S}^1 . L'application deg induit donc un isomorphisme de $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ vers \mathbb{Z} . \square

Cependant, ce n'est pas le cas des sphères en toute dimension :

Proposition 2.5.5. Pour $n \geq 2$, \mathbb{S}^n est simplement connexe.

Démonstration. Voir [1, p.59]. \square

2.5.4 Le tore

Le tore \mathbb{T}^2 est défini par le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, il est connexe car \mathbb{R}^2 l'est. Et d'après le paragraphe précédent, le tore est isomorphe au produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Par conséquent, le groupe fondamental du tore se déduit du groupe fondamental du cercle par :

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Proposition 2.5.6. Le groupe fondamental du tore est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

On peut facilement voir quels sont les lacets qui engendrent le groupe fondamental du tore, sur la Figure 2.14 :

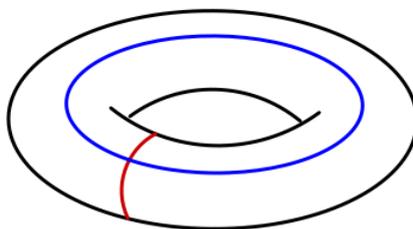


FIGURE 2.14 – Générateurs du groupe fondamental du tore.

Le groupe fondamental du tore se retrouve sur la Figure 2.15. Parcourir un des côtés, par exemple a , dans le sens inverse des flèches se note a^{-1} . En effet, on peut montrer que son groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ a pour présentation $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

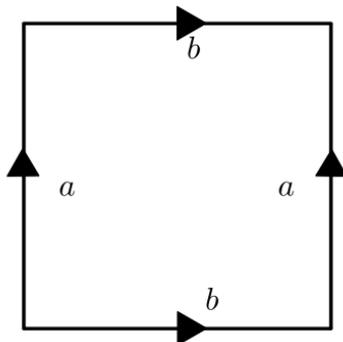


FIGURE 2.15 – Présentation du groupe fondamental du tore.

Remarquons qu'en recollant selon les bords a et b , on retrouve bien le tore.

2.5.5 Tore épointé

Pour la suite, nous aurons besoin du groupe fondamental du tore privé d'un point. On va donc le calculer. Le tore épointé peut être vu comme un tore avec un trou. Ce trou peut être agrandi et déformé, on obtiendra un rétracte par déformation de la figure initiale et le groupe fondamental ne sera alors pas modifié. On choisit donc d'agrandir le trou jusqu'à obtenir le croisement de deux anneaux, selon le procédé décrit dans la Figure 2.16.

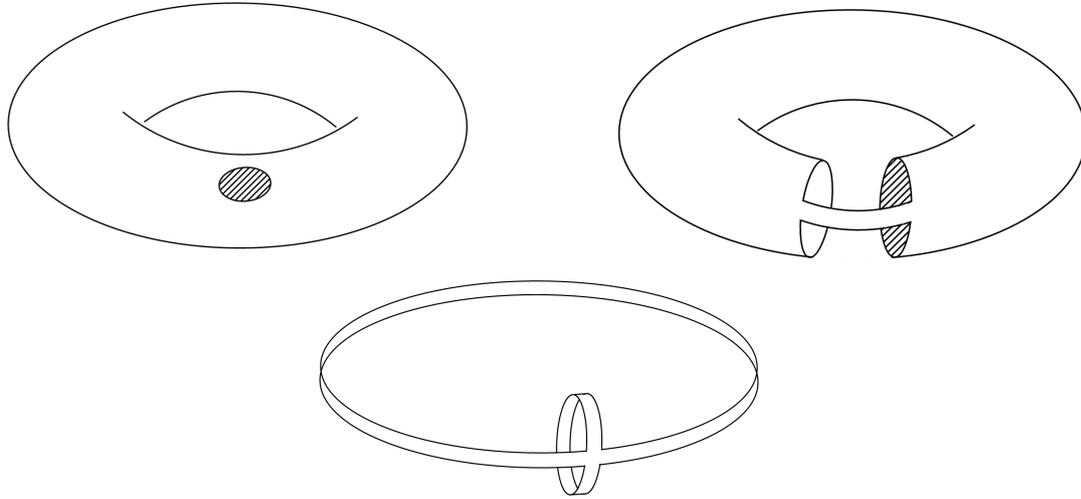


FIGURE 2.16 – Procédé pour le tore épointé.

On est donc ramené à calculer le groupe fondamental de cette réunion de deux cercles. D'après le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental de cette réunion est le produit libre $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ puisque l'intersection de ces deux cercles est un point, qui est donc simplement connexe.

Donc :

Proposition 2.5.7. Le groupe fondamental d'un tore épointé est $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$. Ce groupe est le groupe libre engendré par deux éléments $F_{\{a,b\}}$.

2.5.6 Une surface de genre 2

Une surface de genre 2 est homéomorphe à un tore à 2 trous. Ce dernier peut s'obtenir à partir d'un polygone à 8 côtés.

Il y a 4 types de lacets différents sur un tore à 2 trous, et cela se retrouve en construisant le tore à partir du polygone à 8 côtés. On peut donc supposer que le groupe fondamental d'une surface de genre 2 admet 4 générateurs : a_1, b_1, a_2, b_2 .

Pour faire la démonstration, nous allons utiliser le théorème de Van Kampen. Prenons un tore à 2 trous et coupons le en deux tores privés d'un point. Le groupe fondamental de chacun des deux tores est $F_{\{a_1,b_1\}}$ et $F_{\{a_2,b_2\}}$ d'après le paragraphe précédent. Le groupe fondamental du tore à 2 trous est alors le produit libre des groupes libres $F_{\{a_1,b_1\}}$ et $F_{\{a_2,b_2\}}$ quotienté par la relation $[a_1, b_1][a_2, b_2] = 1$. On retrouve cette construction sur la Figure 2.17.

Proposition 2.5.8. Le groupe fondamental d'une surface de genre 2 est de présentation :

$$\pi_1(S_2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \rangle$$

où $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, $i = 1; 2$.

2.5.7 Une surface de genre g

On peut généraliser la méthode pour un tore à g trous, en procédant par récurrence sur le nombre de trous. Le théorème de Van Kampen s'appliquant alors à un tore à $g - 1$ trous épointé et à un tore simple épointé. On pouvait aussi remarquer qu'une surface de genre g se construit à partir d'un polygone à $4g$ côtés.

Proposition 2.5.9. Le groupe fondamental d'une surface de genre g est : $\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, \dots, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \rangle$, où $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.

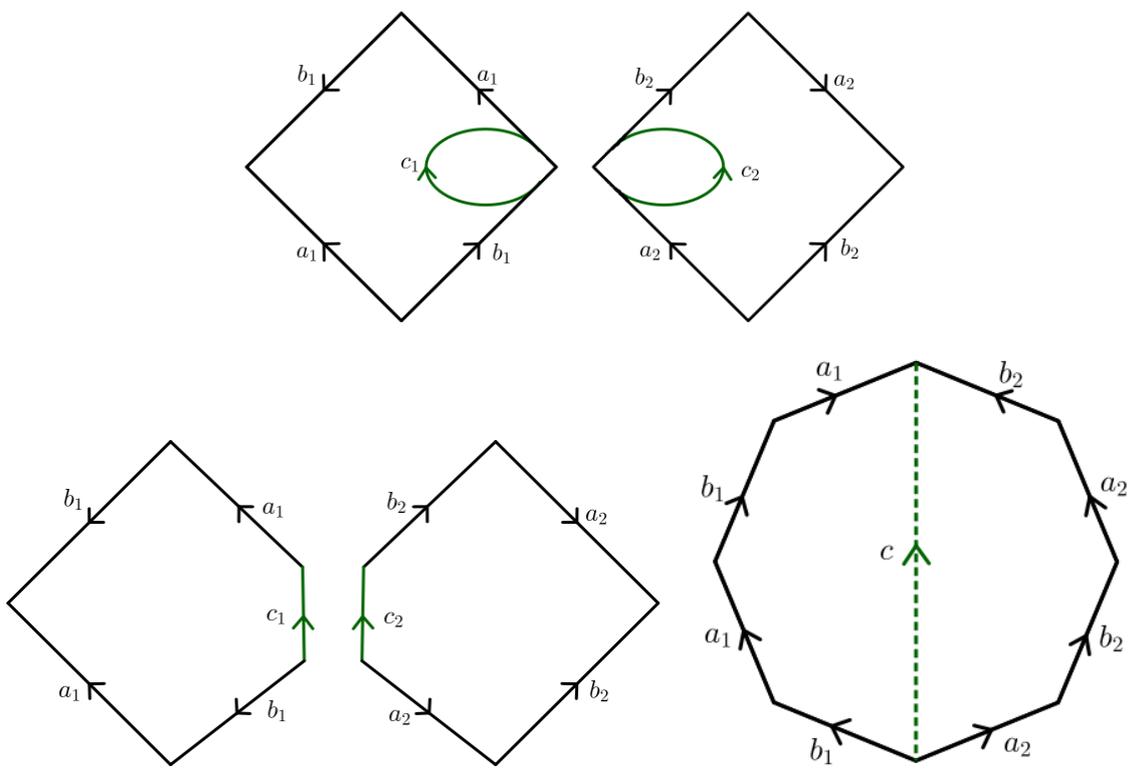


FIGURE 2.17 – Somme connexe de deux tores.

Chapitre 3

Fibration de Hopf

Suite à sa découverte en 1931 par Heinz Hopf, la fibration de Hopf est devenue un objet très important en mathématiques.

3.1 Fibration

Nous avons vu précédemment ce qu'était une variété. Mais pour parler de fibration, nous avons besoin de la notion de variété différentiable de classe C^k . Pour cela nous avons besoin d'introduire plusieurs notions :

Définition 3.1.1. Une application f de classe C^k d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ dans un ouvert $V \subset \mathbb{R}^q$ est un *difféomorphisme de classe C^k* si elle admet une application réciproque de classe C^k .

Définition 3.1.2. Deux cartes (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) d'une variété topologique M sont *compatibles d'ordre k* si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou si $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^k .

Définition 3.1.3. Un *atlas de classe C^k* d'une variété topologique M est un atlas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de M dont deux cartes quelconques sont toujours compatibles d'ordre k .

Définition 3.1.4. Un atlas de classe C^k d'une variété topologique M est dit *maximal* si toute carte compatible avec les cartes de l'atlas appartient elle-même à l'atlas. On l'appelle aussi *structure différentiable de classe C^k* .

Définition 3.1.5. Une *variété différentiable de classe C^k* est une variété topologique munie d'une structure différentiable de classe C^k .

Nous pouvons désormais définir ce qu'est une fibration :

Définition 3.1.6. Soient E et B deux variétés de classe C^k , $0 \leq k \leq \infty$. Une application $p : E \rightarrow B$ de classe C^k est une *fibration de base B et d'espace total E* si pour tout $x \in B$, il existe un ouvert U contenant x , une variété F de classe C^k et un difféomorphisme $\phi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ tel que $\forall y \in U, z \in F, p(\phi(y, z)) = y$. On dit que E est un *espace fibré*.

Pour $b \in B$, $E_b = p^{-1}(b)$ est la *fibres de b* . C'est une sous-variété fermée de E . Si B est connexe, les fibres E_b sont difféomorphes, on dit alors que F est une *fibres type*. Voir [1, p.44].

Cette définition nous dit qu'au dessus d'un ouvert suffisamment petit U de B , il existe un difféomorphisme $\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tel que $p = pr_1 \circ \phi$. Ce qui signifie que la fibration est localement trivialisable, i.e. localement le produit $U \times F$.

3.2 La fibration de Hopf

3.2.1 Introduction

La fibration de Hopf est le premier exemple de fibration qui n'est pas globalement un produit.

Voyons la sphère $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ dans le plan complexe : $\mathbb{S}^3 = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2, |u|^2 + |v|^2 = 1\}$.

Prenons l'axe $v = 0$, c'est une droite complexe, c'est à dire un plan réel. Il rencontre la sphère \mathbb{S}^3 sur $\{(0, v) \in \mathbb{C}^2, |v|^2 = 1\}$, c'est à dire un cercle \mathbb{S}^1 . On peut faire la même chose pour toutes les droites de la

forme $v = au$ avec $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. En effet, l'intersection entre la droite complexe $v = au$ et l'hypersphère est $\{(u, au) \in \mathbb{C}^2, |u|^2 + |a|^2|u|^2 = 1\} = \{(u, au) \in \mathbb{C}^2, |u|^2 = \frac{1}{1+|a|^2}\}$.

On voit donc, en identifiant \mathbb{S}^2 à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, qu'à chaque point de \mathbb{S}^2 , on associe un cercle sur \mathbb{S}^3 . La sphère \mathbb{S}^3 est donc remplie par des cercles. Nous verrons plus loin que ces cercles ne se rencontrent pas pour des valeurs de a différentes. C'est cette partition que l'on appelle la fibration de Hopf. On dit qu'on fait un feuilletage de \mathbb{S}^3 en grands cercles.

La Figure 3.1 est la représentation géométrique que l'on fait de la fibration de Hopf.



FIGURE 3.1 – Représentation de la fibration de Hopf sur une mongolfière, partie de la fresque de l'ENS de Lyon.

3.2.2 Application de Hopf

On appelle *fibration de Hopf* l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^3 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ u, v &\mapsto \frac{v}{u} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h : \mathbb{S}^3 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ u, v &\mapsto (2u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2). \end{aligned}$$

On passe de f à h par projection stéréographique. h est une fibration de \mathbb{S}^3 sur \mathbb{S}^2 de fibre \mathbb{S}^1 . Ce qui se note : $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$.

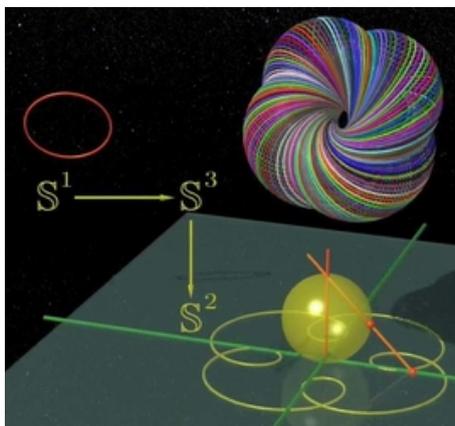


FIGURE 3.2 – La fibration de Hopf, image tirée du film *Dimensions*.

En voyant \mathbb{S}^2 comme $\{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, |z|^2 + t^2 = 1\}$, il est immédiat que h envoie \mathbb{S}^3 dans \mathbb{S}^2 :

$$|2u\bar{v}|^2 + (|u|^2 - |v|^2)^2 = (|u|^2 + |v|^2)^2 = 1$$

3.2.3 Quelques propriétés

On appelle grand cercle, un cercle de rayon maximal.

Proposition 3.2.1. La fibre au dessus de chaque point de \mathbb{S}^2 est un grand cercle.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{S}^2$. Soit $(u, v) \in f^{-1}(a)$ alors

$$\begin{cases} |u|^2 + |v|^2 = 1 \\ u = av \end{cases}$$

La fibre au dessus de a est donc l'intersection d'un plan passant par l'origine et de l'hypersphère, c'est donc bien un grand cercle. \square

Proposition 3.2.2. L'image réciproque de toute courbe fermée de \mathbb{S}^2 par la fibration de Hopf est un tore de \mathbb{S}^3 , appelé *tore de Hopf*. La Figure 3.3 en est un exemple.

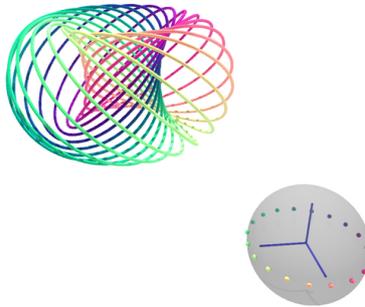


FIGURE 3.3 – Tore de Hopf.

Démonstration. Traitons le cas où la courbe fermée est un parallèle de \mathbb{S}^2 . Soit $a \in \mathbb{S}^2$, il s'écrit $a = \rho e^{it}$. Soit $(u, v) \in \mathbb{S}^3$, tels que $f(u, v) = a$ alors $u = re^{i\theta}$ et $v = \rho re^{i(\theta+t)}$ avec $\rho, r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, t \in [0, 2\pi[$. Or on sait que $|u|^2 + |v|^2 = 1$, d'où :

$$\begin{cases} u = re^{i\theta} \\ a = \rho e^{it} \\ v = \rho re^{i(\theta+t)} \\ r^2 + \rho^2 r^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} u = re^{i\theta} \\ a = \rho e^{it} \\ v = \rho re^{i(\theta+t)} \\ r = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \end{cases} \iff \begin{cases} u = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+\rho^2}} \\ a = \rho e^{it} \\ v = \frac{\rho e^{i(\theta+t)}}{\sqrt{1+\rho^2}} \\ r = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \end{cases}$$

On remarque qu'en faisant varier θ et t , le cercle (u, v) décrit un tore de \mathbb{S}^3 , il est caractérisé par deux coordonnées angulaires. Par rotation tout grand cercle de \mathbb{S}^2 est équivalent à l'équateur. \square

On remarque qu'en faisant varier ρ , on obtient différents tores sur \mathbb{S}^3 , comme le montre la Figure 3.4.

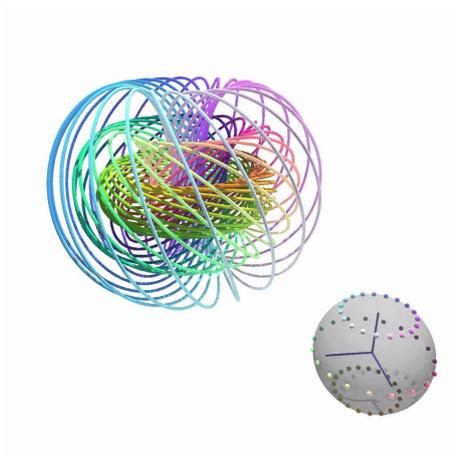


FIGURE 3.4 – Différents tores de Hopf.

En réalité, on peut passer d'une fibre à l'autre par rotation : En effet, soit $a \in \mathbb{S}^2$, $f^{-1}(a) = \mathbb{C}a \cap \mathbb{S}^3$. Soit $A \in SU(2)$ une matrice de rotation. Alors $Af^{-1}(a) = \mathbb{C}Aa \cap \mathbb{S}^3$. C'est un autre grand cercle de \mathbb{S}^3 .

De plus il est possible de montrer que :

Proposition 3.2.3. Deux fibres sont enlacées, au sens connu par projection sur \mathbb{R}^3 . En particulier, deux fibres différentes ne se rencontrent pas.

Démonstration. Nous ne ferons pas la preuve écrite mais laissons-nous convaincre par la Figure 3.5.

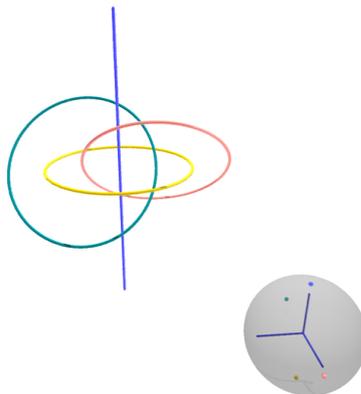


FIGURE 3.5 – 4 fibres enlacées.

□

Proposition 3.2.4. La fibration de Hopf n'est pas globalement un produit : \mathbb{S}^3 n'est pas homéomorphe à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Démonstration. Si la fibration de Hopf était globalement un produit alors $\mathbb{S}^3 \simeq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Or $\pi_1(\mathbb{S}^3) = \{1\}$ et $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^2) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \{1\} \times \mathbb{Z}$. Ce n'est pas possible. □

Chapitre 4

Classification des surfaces de Riemann de genre 1

Introduisons une famille de surfaces :

Définition 4.0.1. Une *surface de Riemann* est un espace topologique S , connexe, séparé, muni d'un atlas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ où $(U_i)_{i \in I}$ forme un recouvrement ouvert de S et les $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ sont des homéomorphismes vers des ouverts de \mathbb{C} tels que les $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ soient biholomorphes. On dit que les cartes sont *holomorphes*.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un résultat important pour différencier les surfaces de Riemann de genre 1, les unes des autres.

4.1 Notions préliminaires et énoncé

4.1.1 Énoncé

Le théorème auquel nous nous intéressons est :

Théorème 4.1.1. Une surface de Riemann de genre 1 compacte est biholomorphe à \mathbb{C}/Λ , où Λ est un réseau.

Toute surface de Riemann de genre 1 est homéomorphe à un tore. Si on rajoute une structure complexe sur cette surface, le théorème permet de différencier les surfaces de Riemann de genre 1 entre elles.

Cependant pour parvenir à le démontrer, nous avons besoin d'introduire de nouvelles notions. Dans la suite de ce chapitre, nous nous placerons sur des surfaces de Riemann compactes.

4.1.2 Nouvelles notions

Définition 4.1.1. Si X et Y sont deux surfaces de Riemann, une fonction $f : X \rightarrow Y$ est *holomorphe* lorsque sa lecture dans les cartes holomorphes est holomorphe : En notant $\phi_{X,i}$, respectivement $\phi_{Y,i}$, les cartes holomorphes de X , respectivement Y , cela signifie que les $\phi_{X,i}^{-1} \circ f \circ \phi_{Y,i}$ sont holomorphes.

Sur une surface de Riemann compacte S , nous pouvons définir différents objets :

Notons C_x l'ensemble des courbes lisses $c : I \rightarrow S$ définies sur un intervalle ouvert I contenant 0 et telles que $c(0) = x$.

Définition 4.1.2. Deux courbes $c_1 : I_1 \rightarrow S$ et $c_2 : I_2 \rightarrow S$ de C_x sont *tangentes* en x s'il existe une carte (U, ϕ) telle que $x \in U$ et $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$.

On peut vérifier que cela ne dépend pas du choix de la carte, voir [8, p.69]. On définit ainsi une relation d'équivalence sur C_x .

On en déduit la définition :

Définition 4.1.3. Un *vecteur tangent* à S en x est une classe d'équivalence de la relation d'équivalence que nous avons vue ci-dessus.

L'*espace tangent* à S en x , noté $T_x S$, est l'ensemble des vecteurs tangents en x .

Et ainsi, le *fibré tangent* à S , noté TS , est la réunion des espaces tangents en chacun des points : $TS = \sqcup_{x \in S} T_x S$.

On peut munir $T_x S$ d'une structure d'espace vectoriel, voir [8, p. 70].

A partir de là, on peut définir ce qu'est un champ de vecteurs sur la surface S :

Définition 4.1.4. Un *champ de vecteurs* V sur S est une application :

$$V : S \rightarrow TS$$

$$x \mapsto V(x) \in T_x S$$

L'intégration d'un champ de vecteurs V fournit ce qu'on appelle une courbe intégrale de V :

Définition 4.1.5. Une *courbe intégrale* de V avec condition initiale x_0 à $t = 0$ est une application différentiable $p :]a, b[\rightarrow S$ telle que $0 \in]a, b[$, $p(0) = x_0$, et $\forall t \in]a, b[$, $p'(t) = V(p(t))$.

Pour chaque point x_0 , il existe une unique solution globale p à l'équation : $\begin{cases} p'(t) = V(p(t)) \\ p(0) = x_0 \end{cases}$ car S est compacte.

Une courbe intégrale est donc solution d'une équation différentielle, on peut lui associer un flot :

Définition 4.1.6. Le *flot* de V est l'ensemble des applications $\phi^t : S \rightarrow S$ telles que $t \mapsto \phi^t(x_0)$ est la courbe intégrale de V de condition initiale x_0 .

On sait, d'après le théorème d'existence et d'unicité des solutions des EDO que ϕ est lisse en t et en x car V l'est et que $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$ avec $\phi^0 = Id$.

De plus, pour démontrer le théorème, nous aurons besoin de la notion de 1-forme.

Les opérateurs différentiels réels $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ forment une base de l'espace tangent en (x, y) . Son dual $T_{(x,y)} S^*$ est engendré par la base duale de $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, notée (dx, dy) . C'est l'ensemble des formes \mathbb{C} -linéaires de source $T_{(x,y)} S$.

Définition 4.1.7. Une *1-forme complexe ou différentielle* sur S est une application $\omega : S \rightarrow TS^*$

$$x \mapsto \omega_x : T_x S \rightarrow \mathbb{C}$$

où TS^* représente l'ensemble des formes \mathbb{C} -linéaires de source TS .

On peut écrire localement ω en fonction de dx et dy : $\omega = Pdx + Qdy$ où P et Q sont définies de manière unique, puis ensuite en fonction de dz et $d\bar{z}$ à l'aide des relations : $\begin{cases} dz = dx + idy \\ d\bar{z} = dx - idy \end{cases}$.

Pour plus de détails voir [11, p .8].

Définition 4.1.8. Une 1-forme est une *forme holomorphe* sur S si $P+iQ$ est holomorphe, où P et Q vérifient la décomposition dans la base (dx, dy) . Elle s'écrit localement $f(z)dz$ avec f une fonction holomorphe.

4.1.3 Formule d'indice de Poincaré-Hopf

Définition 4.1.9. Le *degré* d'une application continue f de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{S}^1 est le nombre de tours algébrique. Nous l'avons défini plus haut pour un chemin. Plus précisément $deg(f) = \frac{\tilde{f}(2\pi) - \tilde{f}(0)}{2\pi}$ où \tilde{f} est le relèvement de f dans \mathbb{R} par l'application $t \mapsto e^{it}$.

Voir [8, p.265] pour l'indépendance par rapport au relèvement choisi.

Définition 4.1.10. A toute singularité isolée x d'un champ de vecteurs V , on associe un entier appelé l'*indice* de V en x , noté $ind_x(V)$ de la façon suivante : On choisit une carte holomorphe (U, ϕ) telle que $\phi(0) = 0$ et que x soit la seule singularité de V contenue dans U . L'indice est alors le degré de l'application $\frac{\phi \circ V}{\|\phi \circ V\|}$ de S_ϵ dans \mathbb{S}^1 où S_ϵ désigne une petite sphère de centre 0 et de rayon ϵ incluse dans $\phi(U)$.

Voir [8, p.271] pour la bonne définition de cet entier.

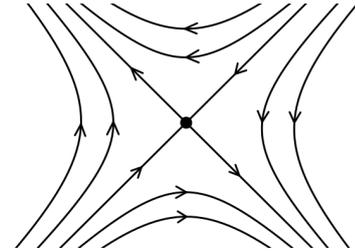
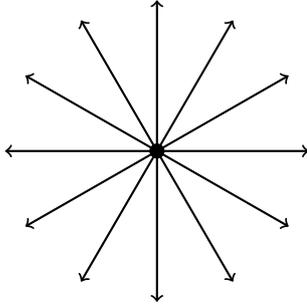


FIGURE 4.1 – Point source : champ de vecteurs d'indice 1 .

FIGURE 4.2 – Point selle : champ de vecteurs d'indice -1 .

Définition 4.1.11. Soit f une fonction holomorphe. f s'écrit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(z - x)^n$ au voisinage de x . L'indice de f en un point x est le plus petit entier k tel que a_k soit non nul. En particulier, il est positif.

Par la suite, nous aurons aussi besoin d'un théorème :

Théorème 4.1.2 (Formule d'indice de Poincaré-Hopf). Soit V un champ de vecteurs à singularités isolées sur S . Alors la somme des indices de ses singularités est égale à la caractéristique d'Euler de la surface S :

$$\sum_{x \in \text{Sing}(V)} \text{ind}_x(V) = \chi(S).$$

Démonstration. Voir [14, p.36]. □

En admettant la proposition :

Proposition 4.1.1. Si ω est une forme holomorphe, il existe un champ de vecteurs V qui a les mêmes singularités que ω et tel que $\forall p \in \text{Sing}(V), \text{ind}_p(V) = -\text{ind}_p(\omega)$.

On obtient :

Théorème 4.1.3 (Formule d'indice de Poincaré-Hopf 2). Pour une forme holomorphe non nulle ω sur S une surface,

$$\sum_{x \in \text{Sing}(\omega)} \text{ind}_x(\omega) = -\chi(S).$$

4.2 Démonstration

Soit S une surface de Riemann compacte de genre un.

On admet qu'il existe une forme holomorphe ω non nulle sur S .

4.2.1 Etape 1 : Existence d'une forme holomorphe qui ne s'annule jamais

Localement, ω s'écrit $\omega = f(z)dz$ où f est une fonction holomorphe. Par un argument analogue au cas des fonctions holomorphes, on peut dire que f n'est pas identiquement nulle, étant donné que S est connexe. Ses singularités sont donc isolées. Or, les singularités de f étant les singularités de ω , les singularités de ω sont aussi isolées. On peut donc appliquer la formule des indices de Poincaré-Hopf 2 :

$$\sum_{x \in \text{Sing}(\omega)} \text{ind}_x(\omega) = -\chi(S) = 2g - 2 = 0.$$

Or pour tout $x \in \text{Sing}(\omega)$, $\text{ind}_x(\omega)$ est positif. D'où pour tout $x \in \text{Sing}(\omega)$, $\text{ind}_x(\omega) = 0$ Donc ω n'a pas de singularité, elle ne s'annule donc jamais.

4.2.2 Etape 2 : Construction d'un champ dual

Comme ω ne s'annule pas, on peut lui associer un *champ de vecteurs dual* : c'est un champ de vecteurs V vérifiant $\omega(V(x)) = 1$. L'existence provient du fait que pour $x \in S$, ω_x est une forme \mathbb{C} -linéaire non nulle puisque ω ne s'annule pas. On peut donc trouver V_x tel que $\omega_x(V_x) = 1$. On a ainsi construit un champ dual V associé à ω . Ce champ de vecteurs est non singulier car pour tout $x \in S$, $\omega_x(V(x)) = 1$ d'où $V(x) \neq 0$. Et il est holomorphe.

4.2.3 Etape 3 : Action de \mathbb{C} sur S

L'intégration du champ de vecteurs dual obtenu à l'étape précédente fournit une action de \mathbb{C} sur S :

$$\begin{aligned} A : \mathbb{C} \times S &\rightarrow S \\ t, x &\mapsto \phi^t(x). \end{aligned}$$

C'est une action dans le sens où $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$.

Le champ de vecteurs étant holomorphe, les applications $t \mapsto \phi^t(x)$ et $x \mapsto \phi^t(x)$ sont holomorphes.

On admet que la surface S étant compacte, la solution de l'équation différentielle $\begin{cases} p'(t) = V(p(t)) \\ p(0) = x_0 \end{cases}$ s'étend pour tout temps $t \in \mathbb{C}$ grâce au théorème de Cauchy Lipschitz pour les équations différentielles holomorphes ; et que $\phi^t(ux) = \phi^{t+u}(x)$ pour $t, u \in \mathbb{C}$.

4.2.4 Etape 4 : Les orbites sont ouvertes.

Soit $x_0 \in S$. Notons $\gamma : t \mapsto \phi^t(x_0)$. γ est holomorphe d'où $D\gamma(t) : \mathbb{C} \rightarrow T_{\gamma(t)}S$ est \mathbb{C} -linéaire et s'identifie à $D\gamma(t).1 = V(\gamma(t))$. Alors $D\gamma(t).1 = V(\gamma(t)) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ car V est non singulier. Donc $D\gamma(t)$ étant \mathbb{C} -linéaire, elle est inversible. Donc d'après le théorème d'inversion locale, γ est un difféomorphisme local. C'est donc en particulier un homéomorphisme local et ainsi une application ouverte, cf annexe D. Donc les orbites $\{\phi^t(x), t \in \mathbb{C}\}$, pour $x \in S$, sont ouvertes car image par une application ouverte d'un ouvert.

4.2.5 Etape 5 : Action transitive

Les orbites forment une partition de S , le complémentaire d'une orbite est donc une réunion d'orbites, il est donc ouvert d'après l'étape précédente. Les orbites sont donc fermées.

Les orbites sont fermées et ouvertes, or S est connexe donc il n'y a qu'une seule orbite, associée à un point que nous noterons x . L'action est donc transitive.

Notons Λ le stabilisateur de x : $\Lambda = \{t \in \mathbb{C}, \phi^t(x) = x\}$; l'orbite de x étant S tout entier.

4.2.6 Etape 6 : Bijection entre S et un quotient de \mathbb{C}

Posons $F : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow S$
 $[t] \mapsto \phi^t(x)$. Montrons que F définit une bijection.

- Tout d'abord elle est bien définie. Prenons t et t_1 deux représentants de la même classe, alors $t_1 = t + h$ avec $h \in \Lambda$. D'où $\phi^{t_1}(x) = \phi^{t+h}(x) = \phi^t(x)$ car $h \in \Lambda$.
- Elle est surjective par définition d'une orbite.
- Elle est injective : si $t_1x = t_2x$ alors

$$\phi^{-t_2+t_1}(x) = \phi^{-t_2}(t_1x) = \phi^{-t_2}(t_2x) = \phi^{t_2-t_2}(x) = \phi^0(x) = x.$$

Donc $t_1 - t_2 \in \Lambda x$ d'où $t_1 \in t_2 + \Lambda$. D'où $[t_1] = [t_2]$.

Donc S s'identifie à \mathbb{C}/Λ .

4.2.7 Etape 7 : Λ est discret

Λ est un sous groupe fermé de \mathbb{C} car toutes les applications mises en jeu sont continues.

Montrons que Λ est discret. Il suffit de montrer qu'il est discret au voisinage d'un point. Pour ce faire, montrons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que si $\phi^t(x) = x$ pour tout $|t| < \epsilon$ alors $t = 0$.

On sait que γ est un difféomorphisme local, il est en particulier injectif sur un voisinage de 0, d'où le résultat.

4.2.8 Etape 8 : Trois possibilités pour Λ

Commençons par montrer que Λ est engendré par au plus deux éléments. Nous avons plusieurs possibilités :

- $\Lambda = \{0\}$.
- Sinon il existe $\lambda_1 \in \Lambda \setminus \{0\}$. On peut le choisir de module minimal car Λ est discret. Alors :
 - soit $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z}$.

- soit il existe $\lambda_2 \in \Lambda \setminus \lambda_1\mathbb{Z}$. On peut aussi le choisir de module minimal. Alors $\lambda_2 \notin \lambda_1\mathbb{R}$ car Λ est discret.

Et $\lambda_1\mathbb{Z} + \lambda_2\mathbb{Z} \subset \Lambda$.

Soit $\lambda \in \Lambda$. Alors, quitte à traduire, on peut supposer que λ se trouve comme sur la Figure 4.3. Et quitte à remplacer λ par $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda$, on peut supposer que λ se trouve dans le triangle inférieur, comme le montre la partie de droite de la Figure 4.3.

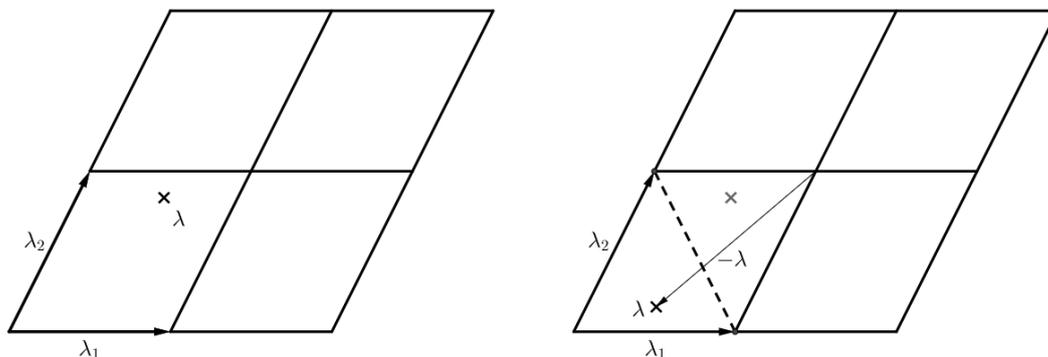


FIGURE 4.3 – Réseau $\lambda_1\mathbb{Z} + \lambda_2\mathbb{Z}$: restriction de la position de λ .

Alors $\lambda = a\lambda_1 + b\lambda_2$ où $0 \leq a, b \leq 1$ et $a + b \leq 1$. D'où $|\lambda| \leq a|\lambda_1| + b|\lambda_2| \leq (a + b)|\lambda_1|$. Nécessairement $a + b = 1$ sinon $|\lambda_1|$ ne serait pas minimal. Et, pour la même raison de minimalité, $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$. Donc $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} + \lambda_2\mathbb{Z}$.

En conclusion,

- $\Lambda = \{0\}$
- ou $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z}$
- ou $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} + \lambda_2\mathbb{Z}$.

4.2.9 Etape 9 : π est un revêtement

Considérons l'action de translation de Λ sur \mathbb{C} .

Clairement, le stabilisateur de chaque point de \mathbb{C} est trivial, l'action est donc libre. De plus, toute partie compacte K de \mathbb{C} étant bornée, elle est contenue dans un rectangle $[m_1, m_2] \times [n_1, n_2]$, avec m_i et n_i des entiers. Et alors, si $t \notin [0, m_2 - m_1] \times [0, n_2 - n_1]$, la translation de K est disjointe de K . Donc $\{t \in \Lambda, (t + K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini, autrement dit, l'action est propre.

Donc d'après le théorème 2.3.1, $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ est un revêtement.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\gamma} & S \\ \pi \downarrow & \nearrow F & \\ \mathbb{C}/\Lambda & & \end{array}$$

4.2.10 Etape 10 : Λ est un réseau

Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\gamma} & S \\ \pi \downarrow & \nearrow F & \\ \mathbb{C}/\Lambda & & \end{array}$$

γ est un homéomorphisme local d'où par propriété de la topologie quotient, F l'est aussi, cf annexe D. Donc F est un homéomorphisme local bijectif, c'est donc un homéomorphisme. Donc \mathbb{C}/Λ est homéomorphe à S . Or S est compacte donc \mathbb{C}/Λ aussi. Comme $\mathbb{C}/\{0\} \simeq \mathbb{C}$ et $\mathbb{C}/\lambda_1\mathbb{Z}$ est homéomorphe à un cylindre, ils ne sont pas compacts.

Donc $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} + \lambda_2\mathbb{Z}$, c'est un réseau.

F est un difféomorphisme local holomorphe, c'est donc un biholomorphisme local or il est bijectif d'après l'étape 6 donc c'est un biholomorphisme. D'où le résultat.

Annexe A

Tore, plan projectif et somme connexe

A.1 Le tore

Définition A.1.1. Le *tore* est le quotient de \mathbb{C} par un réseau : \mathbb{C}/Γ où Γ est un réseau. D'où $\Gamma = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Soit $\bar{x} \in \mathbb{C}/\Gamma$, $\bar{x} = \{x + a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}\}$. En fait, $x \sim y$ ssi on peut passer de x à y par une translation par des nombres entiers. Ainsi en traçant une unité de réseau et en identifiant les côtés opposés, on retrouve bien un tore. De plus, en voyant le tore comme l'espace obtenu en faisant tourner un cercle autour d'un axe qui est dans son plan, un point du tore est défini par deux coordonnées angulaires : une pour décrire sa position sur le cercle et une pour exprimer l'angle dont on a fait tourner le cercle.

A.2 Le ruban de Möbius

Le ruban de Möbius est une surface connue par la fait qu'elle n'a qu'une seule face.

Définition A.2.1. Le *ruban de Möbius* se définit comment étant le quotient de $[-1, 1] \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence $(x, 1) \sim (-x, 0)$.

A.3 Le plan projectif

Définition A.3.1. Le *plan projectif réel* est l'espace $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ quotienté par la relation de colinéarité. C'est aussi le quotient de \mathbb{S}^2 par la relation $x \sim y$ ssi $x = \pm y$.

A.4 Somme connexe

La somme connexe est une opération qui consiste à "coller" deux surfaces connexes ensemble. Prenons S_1 et S_2 deux surfaces disjointes. Soient D_1 , respectivement D_2 , un sous ensemble de S_1 , respectivement, S_2 , homéomorphe au disque unité fermé. Il existe un homéomorphisme h de ∂D_1 sur ∂D_2 . On note C_i le complémentaire de D_i dans S_i , $i = 1; 2$.

Définition A.4.1. La somme connexe de S_1 et S_2 est l'espace quotient obtenu à partir de $S'_1 \cup S'_2$ en identifiant les points x et $h(x)$ pour $x \in \partial D_1$. On la note $S_1 \# S_2$.

Proposition A.4.1. La somme connexe de deux surfaces est une surface. Les propriétés topologiques de la somme connexe ne dépendent ni de l'homéomorphisme choisi, ni des disques.

Annexe B

Caractéristique d'Euler-Poincaré

Définition B.0.1. Soit Σ une surface compacte munie d'une triangulation T . Notons S le nombre de sommets, A le nombre de côtés et F le nombre de triangles de T . La *caractéristique d'Euler-Poincaré* de la surface Σ est $\chi(\Sigma) = S - A + F$.

A priori, ce nombre dépend de la triangulation choisie. En réalité, on peut montrer que :

Proposition B.0.1. La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface triangulée Σ ne dépend pas de la triangulation choisie.

Démonstration. Voir [17, p.21]. □

Lien avec le genre : La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface S s'écrit à partir du genre :

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g & \text{si } S \text{ est orientable} \\ 2 - g & \text{si } S \text{ est non-orientable.} \end{cases}$$

Annexe C

Un peu de théorie des groupes

C.1 Action libre et propre

On ne rappelle pas la définition d'une action, qui a été vue pendant le cours de Théorie des Groupes. Mais rappelons deux caractérisations des actions qui nous sont utiles :

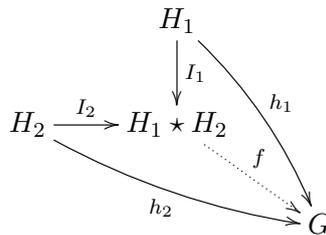
Définition C.1.1. L'action de G sur E est dite *libre* si les stabilisateurs de tous les points de E sont triviaux ;

Définition C.1.2. L'action de G sur E est dite *propre* si, pour tout compact $K \subset E$, $\{g \in G, (g.K) \cap K \neq \emptyset\}$ est une partie relativement compacte de G . En particulier, si G est discret, c'est le cas si $\{g \in G, (g.K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

C.2 Produit libre

A partir d'une famille de groupes $(H_i)_{i \in I}$, on souhaite construire un seul groupe qui contient tous ces groupes en sous-groupes. On pourrait faire le produit ou la somme directe de ces groupes mais alors le résultat serait abélien, ce qui n'est pas des plus naturels. C'est pourquoi nous introduisons le produit libre de groupes.

Proposition C.2.1. Soient H_1 et H_2 deux groupes. Pour tout groupe G et tout morphisme $h_i : H_i \rightarrow G$, $i = 1; 2$, il existe un groupe J et des morphismes injectifs $I_1 : H_1 \rightarrow J$ et $I_2 : H_2 \rightarrow J$ tels que $h_i = f \circ I_i$, $i = 1; 2$. J est alors unique à isomorphisme près, on l'appelle le *produit libre* de H_1 et H_2 , et on note $J = H_1 \star H_2$.



Plus explicitement, $H_1 \star H_2$ est l'ensemble des mots $h_1 h_2 \dots h_m$ de longueur finie arbitraire $m \geq 0$, tel que chaque h_i appartient à l'un des H_j . On peut demander à ce que ces mots soient "réduits" : deux h_i consécutifs n'appartiennent pas au même groupe et aucun des h_i n'est l'élément neutre d'un des groupes.

Le mot vide est l'élément neutre du groupe libre et l'opération sur le groupe est la juxtaposition. Voir [5, p.41] pour les détails.

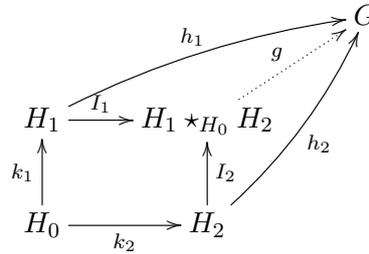
C.3 Produit amalgamé

Définition C.3.1. Soient H_1 et H_2 deux groupes, H_0 un troisième groupe muni de morphismes $h_1 : H_0 \rightarrow H_1$ et $h_2 : H_0 \rightarrow H_2$. On considère le produit libre $H_1 \star H_2$ muni des injections naturelles $i : H_1 \rightarrow H_1 \star H_2$ et $j : H_2 \rightarrow H_1 \star H_2$. Notons N le plus petit sous-groupe normal de $H_1 \star H_2$ qui contient $(i \circ h_1(f_0))(j \circ h_2(f_0))^{-1}$ pour tout $f_0 \in H_0$.

Le produit libre amalgamé $H_1 \star_{H_0} H_2$ de H_1 et H_2 au dessus de H_0 est obtenu en quotientant le produit libre $H_1 \star H_2$ par N .

Remarque : Si H_0 est le groupe trivial, le produit libre amalgamé est alors le produit libre.

Théorème C.3.1 (Propriété universelle). Soient H_1, H_2 et H_0 trois groupes. Pour tout groupe G et tout morphisme $h_i : H_i \rightarrow G$ et $k_i : H_0 \rightarrow H_i$, $i = 1; 2$, si $k_1 \circ h_1 = k_2 \circ h_2$, il existe un unique morphisme $g : H_1 \star_{H_0} H_2 \rightarrow G$ tel que $g \circ I_i = h_i$, $i = 1; 2$.



C.4 Présentation d'un groupe

La présentation d'un groupe est de la forme $\langle G \mid R \rangle$, où G représente les générateurs du groupe et R les différentes relations vérifiées par ces générateurs (sous entendu égales à 1).

Annexe D

Lemmes utiles pour la démonstration du Théorème 4.1.1

Définition D.0.1. Une application f d'un espace topologique E vers un espace topologique F est un *homéomorphisme local* si pour tout point x de E , il existe un voisinage ouvert U de x dans E et un voisinage ouvert V de $f(x)$ dans F tels que la restriction de f soit un homéomorphisme de U sur V .

Lemme D.0.1. Un homéomorphisme local est une application ouverte.

Démonstration. Soit $f : E \rightarrow F$ un homéomorphisme local. Soit O un ouvert de E . Montrons que $f(O)$ est un ouvert de F . Soit $y \in f(O)$, il existe $x \in O$ tel que $y = f(x)$. f étant un homéomorphisme local, il existe U un voisinage ouvert de x et V un voisinage ouvert de y tel que $f|_U : U \rightarrow V$ soit un homéomorphisme. Alors $U \cap O$ est un ouvert de E et $f(U \cap O)$ est un ouvert puisque $f|_U$ est un homéomorphisme et donc une application ouverte. C'est un ouvert contenant y et contenu dans $f(O)$. Donc $f(O)$ est ouvert. \square

Lemme D.0.2. Soient E et F deux groupes et X un sous groupe de E . Si $f : E \rightarrow F$ est un homéomorphisme local, alors par passage au quotient, $\tilde{f} : E/X \rightarrow F$ est aussi un homéomorphisme local.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ E/X & & \end{array}$$

Démonstration. π est un revêtement, c'est donc un homéomorphisme local. Soit $y \in E/X$, π est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $\pi(x) = y$. De plus, π est un homéomorphisme local donc il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tel que $\pi|_U : U \rightarrow V$ soit un homéomorphisme. Notons s son inverse sur V . Quitte à restreindre U et V , on peut supposer qu'il existe W un ouvert de F tel que f soit un homéomorphisme de U sur W .

Alors $f \circ s = \tilde{f} \circ \pi \circ s = \tilde{f}$ sur V . Or f et s sont des homéomorphismes sur U et V respectivement d'où \tilde{f} est un homéomorphisme de V sur W . \tilde{f} est donc un homéomorphisme local. \square

Bibliographie

- [1] AUDIN M., 2004. *Topologie : revêtements et groupe fondamental* [en ligne] [consulté le 30 Juin 2016] Disponible sur : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/courstopalg.pdf>
- [2] BERGERON N. et GUILLOUX A. *Introduction aux surfaces de Riemann* [en ligne] [consulté le 6 Juillet 2016]. Démonstration du théorème 4.1.1 p.88. Disponible sur https://webusers.imj-prg.fr/~nicolas.bergeron/Enseignement_files/SurfaceDeRiemann.pdf
- [3] GHYS E., LEYS J. et ALVAREZ A. *Dimensions* [film].
- [4] GODBILLON C., 1997. *Éléments de topologie algébrique*. Hermann.
- [5] HATCHER A., 2001. *Algebraic Topology*. Cambridge. Chapitre 0 et 1
- [6] Henri Paul de Saint Gervais, collectif de mathématiciens. *Analysis Situs, topologie algébrique des variétés* [en ligne] [consulté le 29 Juin 2016]. Groupes fondamental par les lacets, revêtements et relèvements. Disponible sur <http://analysis-situs.math.cnrs.fr>
- [7] HESS BELLWALD K. *Le groupe fondamental* [en ligne] [consulté le 28 Juin 2016]. Disponible sur http://sma.epfl.ch/~hessbell/topo_alg/GrpeFond.pdf
- [8] LAFONTAINE J., 2010. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences.
- [9] MARSDEN J.E. et RATIU S.T., 1999. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer. Chapitre 4.
- [10] MASSEY W.S., 1999. *Algebraic topology : an introduction*. Springer.
- [11] MATHERON E. *Variables complexes* [en ligne] [consulté le 12 Juillet 2016]. Disponible sur http://matheron.perso.math.cnrs.fr/enseignement_fichiers/PolyVC.pdf
- [12] MEYER J. *La conjecture de Poincaré (I)* [en ligne] [consulté le 23 Juin 2016]. Disponible sur : http://homepages.ulb.ac.be/~jmeyer/Templates/poincare_1.pdf
- [13] MIGNOT T. *Utilisation des revêtements pour la résolution du problème inverse de Galois* [en ligne] [consulté le 23 Juin 2016]. Chapitre 1. Disponible sur <http://math.univ-lyon1.fr/~iohara/Ens/Teddy.pdf>
- [14] MILNOR J.W., 1997. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton. Chapitre 5-6.
- [15] PALESI F. *Surfaces hyperboliques* [en ligne] [consulté le 23 Juin 2016]. Disponible sur http://www.i2m.univ-amu.fr/~fpalesi/index_files/M2-SurfHyp-Chap1.pdf
- [16] PIERRON T. *Topologie algébrique* [en ligne] [consulté le 5 Juillet 2016] Disponible sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tpier758/cours/topa.pdf>
- [17] POL D. *Classification des surfaces topologiques compactes* [en ligne] [consulté le 6 Juillet 2016]. Disponible sur <http://www.math.univ-angers.fr/~pol/memoirem1.pdf>
- [18] SCHWARTZ R.E., 2011. *Mostly Surfaces*. AMS.
Les images de la fibration de Hopf proviennent de <http://nilesjohnson.net/hopf.html>.
Figures réalisées avec *Geogebra* et *Tikz*.