

# Leçon 263 : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

## Développements :

TCL et calculs de fonctions caractéristiques

## Bibliographie :

Garet de l'intégration aux probabilités (G), Cottrell(C), Barbe Ledoux(BL), Ouvrard 1, Cadre

## Plan

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probablisé. Soit  $X$  une variable aléatoire.

**Définition 1** (G p. 103). Loi  $\mathbb{P}_X$

## 1 Définitions, moments et lois usuelles

### 1.1 Loi de v.a. à densité

**Définition 2** (G p. 120). V.a à densité

**Proposition 3** (G p. 120). *Lien entre densité et proba*

**Proposition 4** (G p. 121). *Densité couple et loi marginale*

**Proposition 5** (Ouv 1 p. 189). *Densité d'une transformation*

### 1.2 Lois usuelles

#### 1.2.1 Loi uniforme

**Définition 6** (G p. 127). loi uniforme

Interprétation :

*Remarque 7.* Elle permet de retrouver d'autres lois

**Définition 8** (G p. 127). Inverse généralisé

**Théorème 9** (G p. 127). *Fonction de répartition et inverse généralisé*

**Exemple 10.**

#### 1.2.2 Loi gaussienne

**Définition 11** (G p. 128). loi gaussienne

**Proposition 12** (G p. 128). *Lien entre loi normale et loi normale centrée réduite*

Interprétation :

#### 1.2.3 Loi du chi-deux

[G p.294]

**Définition 13.** loi du chi-deux

Interprétation : somme de carrés de loi normale centrée réduite

#### 1.2.4 Loi exponentielle

**Définition 14** (G p. 129). Loi exponentielle

Interprétation : Durée de vie (G p. 129)

**Proposition 15** (G p. 138). *Sans mémoire*

#### 1.2.5 Loi de Cauchy

**Définition 16** (G p. 130). Loi de Cauchy

Interprétation : phare (G p. 130)

## 1.3 Espérance et variance

**Théorème 17** (G p. 149). *Espérance pour une v.a. à densité + thm de transfert*

**Exemple 18.**

**Contre-exemple 19** ( G p. 174). Cauchy

\*\*\*

**Proposition 20** (G p. 144). *Markov*

**Définition 21** (G p. 154). Variance

**Proposition 22** (G p. 154). *Formule de variance*

**Définition 23** (G p. 154). Moments d'ordre  $n$

\*\*\* Tableau récapitulant  $X(\omega)$ , les densités, espérance et variance.[G p. 171]

**Application 24** (G p. 179). Espérance du max et du min de v.a. de loi uniforme

**Application 25** (G p. 181). Espérance du max et du min de v.a. de loi exponentielle

## 2 V.a. à densité indépendantes

### 2.1 Indépendance

**Proposition 26** (G p. 122). *Densité d'un couple de v.a. indépendantes et réciproque*

**Exemple 27** (G p. 183 ex 63). Deux v.a. qui ne sont pas indépendantes car pas produit des densités

### 2.2 Somme de variables aléatoires à densité indépendantes

**Théorème 28** (G p. 162). *Densité de la somme de v.a. indépendantes*

**Exemple 29** (Cottrell ex 3.8 p.79).

**Proposition 30** (G p. 217). *Fonction caractéristique et indépendance*

**Exemple 31.** Somme de lois normales indépendantes

**Exemple 32** (Cottrell p. 125 ex 4.14). Somme de Cauchy indépendantes

### 2.3 Ouverture : Vecteurs gaussiens

**Définition 33** (Cadre p. 182 ou G p. 287). Vecteur gaussien

**Proposition 34** (G p. 287). *Image d'un vecteur gaussien*

**Proposition 35** (G p.288). *Marginales du vecteur gaussien*

**Proposition 36** (Cadre p. 182 ou G p. 291). *Caractérisation de l'indépendance*

**Corollaire 37** (G p. 291). *Densité*

**Théorème 38** (Cadre p. 97 ou G p. 295). *Cochran*

**Application 39** (Cadre p. 99 ou G p. 312). Estimateurs

## 3 Fonction caractéristique

### 3.1 Définition et premières propriétés

**Définition 40** (G p.213). Fonction caractéristique

*Remarque 41.* C'est la transformée de Fourier de la loi  $\mathbb{P}_X$ .

**Exemple 42** (G p. 219 et 210). Quelques fonctions caractéristiques lois à densité

**Théorème 43** (G p.213). *Caractérise la loi*

**Théorème 44** (BL p. 63). *Formule d'inversion de Fourier*

**Théorème 45** (G p. 218 +BL p.64 OUV2 p.204 pr le vrai thm). *Lien ordre des moments et régularité de la fonction caractéristique*

### 3.2 TCL et applications

**Théorème 46** (G p. 276). *Thm de Levy*

**Exemple 47** (G p. 283 ex 90). étude d'une cv

**Exemple 48.** cv en loi de  $N(m_n, \sigma_n^2)$ .

**Théorème 49** (G p. 277). *TCL*

**Application 50.** Intervalle de confiance