Li : Daniel Li Analyse fonctionnelle   OA = objectif agreg
G : Garet de l'intégration aux probabilités.
⚠ Attention à la convention pour la transformée de Fourier.

250 — Transformation de Fourier. Application.

ST = Struillou   (Amrani + FGN) Eq de la chaleur

I - Généralités dans L^1

1. Définition et propriétés. Li

DEF 1. On app transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ la fonction $\mathcal{F}f = \hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par
$\forall y \in \mathbb{R}^d \quad \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(2i\pi \langle x, y\rangle)\, dx.$

• La transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ est l'application linéaire $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}^d}$, $f \mapsto \hat{f}$

rmq 2: on considera $d = 1$ par la suite. Tous les résultats se généralisent pour $d \geq 2$.

rmq 3: $f \in L^1(\mathbb{R})$ permet de prouver que $\hat{f}$ est bien def sur $\mathbb{R}$ ST

ex 4: Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ $f = \mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]} \in L^1(\mathbb{R})$ on a.
$\mathcal{F}(f)(t) = 2\,\frac{\sin(\alpha t)}{t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$. ex 13 p101 Li
ou ex Li p92 + voir exercice

2- ~~Image de $\mathcal{F}$~~ et continuité / espace d'arrivée et $\mathcal{C}^0$

Lemme 5: Riemann - Lebesgue
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a $\lim_{y \to \pm\infty} \hat{f}(y) = 0$ même chose

THM 6 si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ Li p 87
[où $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ = fct continue qui tendent vers 0 en l'infini

cor 7: L'application linéaire $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est continue de norme ≤ 1 cor III 2.5 p 89 Li

rmq 8 on verra en prop 22 que la norme est exactement 1

b - Propriétés élémentaires   G p205 ou ST

PROP 9 soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
1) $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\exp(2i\pi x_0 t) f(t))(x) = \mathcal{F}f(x - x_0)$
2) $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f(t-\tau))(\nu) = e^{-2i\pi\tau\nu}\, \mathcal{F}(f)(\nu)$
3) $\forall k \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{F}(f(kt))(\nu) = \frac{1}{|k|}\mathcal{F}f\left(\frac{\nu}{k}\right)$.

ex 10 $\mathcal{F}(\cos(2\pi\nu_0 t) f(t))(\nu) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}f(\nu-\nu_0) + \mathcal{F}f(\nu+\nu_0)\right)$

PROP 11 soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ ST p78.
* si f est paire (resp. impaire) alors $\hat{f}$ est paire (resp. impaire)
* si f est paire et à valeurs réelle (resp. impair à valeur imaginaire pur) alors $\hat{f}$ est paire à val. réelles (resp imp. à valeur imag. pur).

2. Dérivation et convolution

a - Dérivation   ST 78-79-80

DERIVEE DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER ST 78

PROP 12 soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $t \mapsto tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ et sa dérivée est égal à
$\frac{d\hat{f}}{d\nu} = -2i\pi\,\mathcal{F}(tf(t))(\nu).$

cor 13 si $t \mapsto t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ pour $0 \leq k \leq n$. alors $\hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$ et ses dérivées sont : $\forall\ 0 \leq k \leq n$
$\frac{d^k\hat{f}}{d\nu^k} = (-2i\pi)^k\,\mathcal{F}(t^k f(t))(\nu)$

ex 14. Calcul de TF de $t \mapsto te^{-\alpha t} H(t)$
par ex 4), $\hat{f}(\nu) = 1/(\alpha + 2i\pi\nu)$
$\hat{g}(\nu) = \frac{d\hat{f}}{d\nu} = \frac{1}{(\alpha + 2i\pi\nu)^2}$

TRANSFORMATION DE FOURIER DE LA DERIVEE ST 79

PROP 15 si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors
$\mathcal{F}(f')(\nu) = 2i\pi\nu\,\hat{f}(\nu)$

cor 16 si $f \in C^n(\mathbb{R})$ avec $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall 0 \leq k \leq n$
$\forall k \in \{0, \dots n\}$ $\quad \mathcal{F}(f^{(k)})(\nu) = (2i\pi\nu)^k\,\mathcal{F}(f)(\nu)$.

cor 17 si $f \in C^n(\mathbb{R})$ avec $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall\ 0 \leq k \leq n$
alors $\hat{f}(\nu) = o(|\nu|^{-n})$ quand $\nu \to \pm\infty$.

Rmq 18   ST 80
• Plus f tend vers 0 plus $\hat{f}$ régulière.
• Réciproquement (cor 17) plus f régulière plus $\hat{f}$ tend rapidement vers 0.

ex = $\mathcal{F}$ de la gaussienne   ST p97 ex 4

b- Convolution

Li p75

DEF 19 soient f et g : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit le pdt de convolut° de f et g en x existe si $t \mapsto f(x-t)g(t) \in L^1(\mathbb{R})$.
On pose $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt$.

Li p81

THM 20 : si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f*g$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et $f*g \in L^1(\mathbb{R})$. De plus $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$

Li p88.

THM 21 : Pdt de convolut° et Fourier
$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

Li p88.

cor 22 L'application linéaire $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ qui est continue est de norme 1

3. Inversion Li p91

Thm 23 : Inversion
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ alors f est égale p.p à la fct g def par $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2i\pi yx} dy$

rmq 24 ce qui se reformule sous ces condit° par $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f$

cor 24 $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.
+ ex 130 Li p101 + ex ST

II - Extension de la transfo de Fourier

1. Passage à L^2

Comme $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ on ne peut pas utiliser la définition 1, on définit la transfo de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Li p95

LEM 25 si f et $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors on a
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x)\,dx$$
voir si vraime L

voir DVLPT

Li p94

THM 26 Plancherel (19-10)
La transformation de Fourier $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme d'esp de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui même.

notation : on notera $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ce prolongement.
+ p97 calcul sur L^2

2. Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Li p263

DEF 27 on note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ens des fct $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $|f^{(k)}(x)| = \underset{|x|\to\infty}{o}(|x|^{-n})$ $\forall n, k \in \mathbb{N}$
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace de Schwartz

LIE 263

EX 28 $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. (ST 140)

PROP 29 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un e.v qui est stable par d, par pdt et par pdt avec un polynôme Li p264

PROP 30 on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

THM 31 $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une bijection

LIE p264

PROP 32 on a   LIE (3) et (4) prop x52   264
(1) $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$
(2) $\forall k, n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ on a
$\hat{f}^{(k)}(y) = \hat{f_k}(y)$ où $f_k(y) = (-2i\pi x)^k f(y)$
$\widehat{f^{(n)}}(y) = (2i\pi y)^n \hat{f}(y)$

DEF 28 $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on pose $q_{k,n}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^n |f^{(k)}(x)|$ semi-norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Li p65

PROP 29 $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est continue Li p266

3. Distribut° tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ Li p266.

DEF 30 une distrib. tempérée est une appli def sur $\mathcal{S}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ linéaire et c. L'ens des distrib tempérées est donc le dual de $\mathcal{S}$ et on le note $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

ST

PROP 31 On a $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si T est une forme linéaire et $\exists C > 0$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $|\langle T, \varphi \rangle| \le C \sup_{0 \le k, n \le m} q_{k,n}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

LIE p266

L p269

EX 32 : Masse de Dirac $\delta_a \in S'(\mathbb{R})$

DEF 33 : Fourier dans $S'(\mathbb{R})$

Soit $T \in S'(\mathbb{R})$. On définit sa transfo de Fourier $\mathcal{F}T$ comme la distrib tempérée $\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$ pour $\varphi \in S(\mathbb{R})$

EX 34 : $\mathcal{F}\delta_a(\cdot) = e^{-2i\pi a \cdot}$ + ex de calcul exercice 10

III - Applications

1. Fct caractéristiques G

G p213

DEF 35 Soit X une v.a. On appelle fct caractéristique de X la fonction $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

rmq 36 si X est une v.a de densité f. La transfo de Fourier de f correspond à la fct caractéristique de X. modulo renormalisation

G p219 à 223

EX 37 par $X \sim \mathcal{N}(0,1)$: $\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

G p217.

PROP 38 Soient X et Y 2 v.a indépendantes de densité f et g. Alors X+Y a pour densité $f * g$ et on a $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. + cas du couple

EX 39 si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{C}(1)$ Cauchy de param 1 avec X et Y indépendantes alors X+Y a pour densité $f * g$ et pour fonct° caract. $\varphi_{X+Y}(t) = e^{-\left(|t| + \frac{|t|^2}{2}\right)}$.

+ caractérise la loi : G p213 + thm de Levy + TCL

2. Polynômes orthogonaux OA

DEF 40 soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fct poids $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable stt positive et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n \rho(x) < \infty$. OA p110

DEF 41 Soit $L^2(I,\rho)$ l'ens des fct de carrés intégrables par la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue, c-a-d munit du p.s $\langle f,g \rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$ OA p110

PROP 42 $(L^2(I,\rho), \langle , \rangle_\rho, \|\cdot\|)$ est un Hilbert. Il existe une unique famille de polynômes orthogonaux associés à ρ c-a-d une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires orthogonaux $\deg P_n = n$ et normé.

OA p110

THM 43 : DENSITE POLYNOMES ORTHOGONAUX DEV.

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ poids de I. Supp qu'il existe $a > 0$ tq $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx < \infty$ alors la suite $(P_n)_n$ de polynômes orthogonaux associés à ρ forment une b.h de $L^2(I,\rho)$.

EX 44 Polynômes de Hermite pour $\rho = e^{-x^2}$ et $I = \mathbb{R}$

$P_0 = 1$ $P_1 = X$ $P_2 = X^2 - 1/2$

3. Equat° de la chaleur (si on veut)

DEF 45 Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ fonction continue et 2π-périodique on définit $(C_n(f))_n$ la suite des coeff. de Fourier par $C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ $n \in \mathbb{Z}$. Amari

THM 46 (Parseval) Pour toute fonction cpm 2π-périodique sur $[0,2\pi]$ on a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

Appli 47 : Equation de la chaleur FGN

Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fct non-nulle C^1 pm 2π-périodique $\exists !$ u solution de l'EDP $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $u(0,x) = u_0(x)$ où u est 2π-périodique par rapport à x (et pour tout $t \geq 0$) continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et C^∞ sur $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$.