Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications

Développements :

Equation de la chaleur, théorème de Féjer

Bibliographie :

Amrani, ZQ, OA, Gou
Motivation dans ZQ p.69

Plan

Convention pour la norme 1 et la norme 2, Déf de $e_k : t \mapsto e^{ikt}$

1 Coefficients de Fourier

1.1 Définition, règles de calcul

Définition 1 (ZQ p70)**.** Coefficient de Fourier de f pour $f \in \mathrm{L}^1(0, 2\pi)$.

Définition 2 (ZQ p.70)**.** Pour $f \in \mathrm{L}^1(0, 2\pi)$, on définit la série de Fourier de f, convergente ou non par ..., somme partielle

Proposition 3 (ZQ p.72)**.** *Relations entre les coefficients de Fourier (translation, dérivée, produit de convolution etc)*

Exemple 4 (ZQ p.91)**.** $c_n(e_k)$, fonction triangle

1.2 Décroissance et régularité

Proposition 5 (ZQ p.73)**.** *Lemme de Riemann Lebesgue :* $f \in \mathrm{L}^1(0, 2\pi)$

Remarque 6. Cela se reformule en : l'applicaton $f \in \mathrm{L}^1(0, 2\pi) \mapsto (c_n(f))$ est à valeurs dans $c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Il s'agit d'une application linéaire continue de norme 1

Proposition 7 (Amr p.306)**.** *pour* $f \in C \cap C^1_{pm}$ 2π *pér,* $c_n(f')$
pour $f \in C^k$

2 Convergence

2.1 Noyau de Dirichlet et noyau de Féjer

Définition 8 (ZQ p.75-76)**.** Noyau de Dirichlet et noyau de Féjer

Proposition 9 (ZQ p.75-76)**.** *somme partielle de la série de Fourier en fonction de* D_n*, leur moyenne de Cesaro en fonction de* K_n

Proposition 10 (ZQ p.75-77)**.** *Propriétés de* D_n *et* K_n

Remarque 11. K_n est une approximation de l'unité, pas D_n

2.2 Un cas de divergence

Théorème 12 (Gou p.404)**.** *Banach Steinhauss*

Application 13 (Gou p.405)**.** Il existe des fonctions dont la série de Fourier diverge en 0

2.3 Fonctions de carré intégrable

Proposition 14 (OA p.123)**.** *Espace de Hilbert+Produit scalaire*

Proposition 15 (OA p.123)**.** *Expression des coeff de Fourier comme produit scalaire*

Proposition 16 (OA p.123)**.** *Base hilbertienne de* L^2 *(demo par Stone Weierstrass)*

Remarque 17 (OA p.123). $S_N(f)$ projection orthogonale

Corollaire 18 (OA p.123)**.** f *comme somme des produit scalaire, cv dans* L^2*, Ecriture de* (f, g) *+ Parseval*

Remarque 19. Cela se reformule en : l'applicaton $f \in \mathrm{L}^2(0, 2\pi) \mapsto (c_n(f))$ est à valeurs dans $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Il s'agit d'une application linéaire continue de norme 1. L'application coeff de Fourier est donc une isométrie

Remarque 20. Si f est continue et C^1 pm alors la série de Fourier CN

Application 21 (Gou)**.** Ex1

Application 22 (Amr)**.** Calcul de sommes

2.4 Convergence au sens de Cesaro : thm de Féjer

Théorème 23 (ZQ p. 84)**.** *Féjer*

Remarque 24. La moyenne de Cesaro a de meilleures propriétés de cv.

Corollaire 25 (ZQ p.86 ii)**.** *Si* $f \in C([0, 2\pi])$ *et si sa série de Fourier cv simplement alors sa somme coincide avec* f *partout*

Corollaire 26 (ZQ p.86)**.** *Toute fonction continue dont la série de Fourier CN peut être dvlpée en série de Fourier*

Corollaire 27 (Amr)**.** *Si f est continue et C^1 pm, alors CU (même CN) de sa série de Fourier vers f.*

Application 28 (FGN Analyse 4)**.** Equation de la chaleur

Application 29 (Gou)**.** Ex 1

Corollaire 30 (ZQ p.85)**.** *Densité des poly trigo (on retrouve la densité de la famille (e_n))*

Corollaire 31 (ZQ p.86 vi)**.** *Injectivité des coefficients de Fourier*

2.5 Convergence de la série de Fourier : Théorème de Dirichlet

Théorème 32 (ZQ p.89)**.** *Dirichlet*

Exemple 33 (ZQ)**.** Fonction signal