

Leçon 245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de \mathbb{C} . Exemples et applications.

Développements :

Fonctions caractéristiques et Prolongement de Gamma

Bibliographie :

JSR et Amar Matheron. On a entendu parler un peu tard du Pabion, pour être familiarisé avec et donc pouvoir l'utiliser, mais la quasi-totalité des résultats de ce plan se trouvent dedans.

Plan

1 Introduction aux fonctions holomorphes

Définition 1 (JSR p. 274 ou Amar p. 65). Fonction \mathbb{C} dérivable avec le taux d'accroissement

Définition 2 (Amar p. 68). Holomorphe

Remarque 3 (JSR p. 274). holomorphe implique continue

Exemple 4 (Amar p. 65).

Contre-exemple 5 (Amar p. 65).

Proposition 6 (Amar p. 65). *Opérations*

Proposition 7 (JSR p. 274 ou Amar p.69). *Equations de Cauchy-Riemann*

Exemple 8 (Amar p. 73- 79). expo, log

Proposition 9. *sur connexe, $f' = 0$ implique f constante*

Définition 10 (Amar p. 70 ou JSR p. 273 ou T p. 50). Analytique

Proposition 11 (Amar p. 70 JSR ou T p. 50). *Analytique implique holomorphe*

2 Propriétés générales des fonctions holomorphes

2.1 Intégrale et indice d'un chemin

(selon la place sinon considérer en acquis et rappeler seulement la formule de l'intégrale en pré-plan)

Définition 12 (Amar p. 13-14 ou JSR p. 262). Chemin, Lacet

Définition 13 (Amar p. 18 ou JSR p. 264). Intégrale sur un lacet

Exemple 14 (Amar p. 19).

Définition 15 (Amar p. 193 ou JSR p. 278). Indice

Proposition 16 (JSR p. 278). *indice localement est etc*

Application 17 (Amar p. 193). Indice pour un cercle

2.2 Formule de Cauchy et conséquences

Théorème 18 (Tau p. 76). *Thm de Cauchy*

Théorème 19 (Tau p.77 ou JSR p. 279). *Formule de Cauchy*

Corollaire 20 (Amar p. 84). *Formule de la moyenne*

Corollaire 21 (Amar p. 86 ou Tau p.77). *Holomorphe implique analytique + rayon de cv*

Corollaire 22 (Amar p. 84). *formule de Cauchy des dérivées*

2.3 Inégalités de Cauchy

Théorème 23 (Amar p. 89 ou JSR p. 280). *inégalités de Cauchy*

Application 24 (Amar p. 91). Conséquence : Thm de convergence de Weierstrass

Exemple 25 (Amar p. 91). Fonction zéta

Corollaire 26 (Pab p.61). *Liouville*

Application 27. D'Alembert Gauss

2.4 Principe de zéros isolés

Théorème 28 (Amar p. 133). *Théorème des zéros isolés*

Exemple 29. ex 4.1 Tauvel

Théorème 30 (Amar p. 88). *principe du prolongement analytique*

2.5 Propriété de la moyenne et principe du maximum

Proposition 31 (Amar p. 153 ou Tau p. 86). *Principe du maximum*

Corollaire 32 (Tau p.86). *Principe du maximum global*

Application 33 (Tau p.87). Lemme de Schwarz

2.6 Holomorphie sous le signe intégral

Théorème 34 (Amar p. 94). *Thm d'holomorphie sous le signe intégral*

Application 35. Gamma est holomorphe sur $\{Re > 0\}$

Application 36 (Garet). Fonction caractéristique que la loi normale

3 Fonctions méromorphes

3.1 Série de Laurent et points singuliers et fonctions méromorphes

Théorème 37 (Tau p. 138 ou Amar p. 140). *Série de Laurent*

Remarque 38. Résidu c'est a_{-1}

Définition 39 (Amar p. 144 ou JSR p. 293 ou Tau p.101). poles, singularités essentielles et effaçables

Proposition 40 (Amar p. 144). *Lien entre singularités et série de Laurent*

Exemple 41 (Tau p. 142). exercice 10.2

Définition 42 (Amar p. 147 ou JSR p. 296). Fonction méromorphe

Exemple 43.

Proposition 44 (Tau p. 101). *Quotient de deux fonctions holomorphes*

3.2 Théorème des résidus et conséquences

Théorème 45 (Amar p.239). *Thm des résidus*

Exemple 46 (Amar p. 240). Calcul pratique d'un résidu

Application 47. Fonction caractéristique de la loi de Cauchy

Corollaire 48 (Amar p. 241). *Principe de l'argument*

Application 49 (Amar p. 241). Thm de Rouché

3.3 Séries de fonctions méromorphes

Définition 50 (Tau p. 109). Cv de séries méromorphes

Théorème 51 (Tau p. 109). *Thm des séries méromorphes*

Application 52. Prolongement de Gamma