243

Convergence des series entieres, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Amr = Amrani   Tauvel, Analyse complexe pour la L3   + Garet de l'intégrat° aux probas.

I- Généralités

DEF : serie entière   Amr p 229

DEF : somme serie entière

1- Rayon de convergence

a- Définitions

Lemme : Abel   Amr p 230

THM : $\exists! R>0$ tq $\begin{cases} \sum a_n z^n \text{ CVA pour } |z|<R \\ \sum a_n z^n \text{ DV pour } |z|>R. \end{cases}$ Amr p 230

rmq $R=\infty$ $\sum a_n z^n$ cvge pour $z \in \mathbb{C}$..   Amr p 231
somme = fonction entière

DEF : rayon de cvgence
disque de cvgence   Amr p 231

b- Méthode de calcul   Amr p 232

on pose $\frac{1}{R}=0$ si $R=\infty$ et $\frac{1}{R}=\infty$ si $R=0$

PROP : regle de d'Alembert   prop 1.9

EX $\sum \frac{z^n}{n!}$ $R=\infty$.   prop 1.10

Rmq cas où inapplicable   rmq 1.11

THM : Formule Hadamard   1.13

EX $\sum 2^n z^{2n}$ 1.14

cor : regle de Cauchy   1.15

EX $\sum \frac{n}{2^n} z^n$ $R=2$ 1.16

2- Convergence des series entières

THM : serie entière CVN sur tt compact du disque   Amr p 238   3.1

rmq : en gral pas de CVU sur le disque. Amr p 238

rmq si $R \neq \infty$ series entières CVU sur D disque de cvgence sont celles + CVU sur $\overline{D}$ Amr p 238

COR : fct somme continue sur disque de cvgence   Amr p 239 4.2

EX $\sum \frac{z^n}{n!}$ de rayon ∞ sa somme est $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{C}$ Amr 239

cor fct somme a un DL à l'ordre p dt le DL est donné par $a_0 + \ldots + a_p z^p + o(z^p)$ avec $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

3- Opérations et comparaison

a- comparaison de rayons de cvgence   Amr p 234

$\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ 2 series entieres de rayon R_a, R_b.

PROP si $\forall n$ $|a_n| \leq |b_n|$ $\Rightarrow$ $R_a \geq R_b$.

EX $\sum e^{\cos n} z^n$ de rayon 1.

PROP si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.

PROP si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

cor : si $\sum a_n z^n$ avec $a_n = F(n)$ où F fract° rationnelle alors $\sum$ $a_n z^n$ de rayon 1.

b- Rayon de cv de la somme et du produit   Amr p 235

DEF : serie somme et serie produit   def 2.2

THM : · rayon de cvgence de serie somme
· rayon de cvgence de la serie produit   thm 2.3

rmq : on peut avoir $R > \max(R_a, R_b)$ pour serie somme et produit   rmq 2.4

c- Série entière derivée   Amr p 237

DEF : serie entière dérivée

PROP : serie entière et serie entière d ont m̄ rayon de cvgence.

rmq · $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ et $\sum a_n z^n$ m̄ rayon de cvg.
· $\sum a_n z^n$ et $\sum F(n) a_n z^n$ où F fract° rationnelle ont m̄ rayon de cvgence

d- Intégration et ~~d~~ d de la fct somme   Amr p 240

THM : Integrat° de la fct somme   thm 4.6

cor : primitive de la fct somme   4.7 p 240 mettre en c)

THM : Dérivabilité de la fct somme 4.9 Amr p 240

cor : fct somme est C^∞ + calcul des Δ de la fct somme 4.10 Amr p 240

EX $\sum x^n$ $R = 1$ $\frac{1}{1-x} = \sum x^n \ \forall |x|<1$

calcul des dérivées Ex 4.44 Amr p 241

4. Étude d'une série entière : série génératrice

Garet

+ Galton Watson) DEV

II - Comportement sur le bord du disque de convergence Amr p 231 rmq 4.7

DEF : cercle incertitude

on ne peut rien dire sur le cercle.

EX : $\sum z^n$ $R = 1$ DV $\forall z \in \mathbb{C}$ $|z| = 1$

EX $\sum \frac{z^n}{n^2}$ $R = 1$ CVGE $\forall z \in \mathbb{C}$ $|z| = 1$

EX $\sum \frac{z^n}{n}$ $R = 1$ DVGE pour $z = 1$

CVGE $\forall z \in \mathbb{C}$ $|z| = 1$ $z \neq 1$

III - Fonctions DSE Amr p 241

on s'intéresse aux fcts $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 - Définition Amr p 241

DEF : DSE en 0 5.2 Amr

DEF : DSE en x_0 5.3 Amr

rmq : être DSE = notion locale 5.4 Amr

rmq : $r = R$ pas toujours vrai rmq 5.4 2)

(r : def de DSE ; R : rayon de cvgce)

$f(x) = \begin{cases} e^{-1} & x \leq -1 \\ e^x & -1 \leq x \leq 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases}$

EX : Polynôme est DSE en tt point de $\mathbb{R}$ ex 5.5

PROP si f DSE alors f est C^∞ et coïncide formule de Taylor

cor : unicité des coeff du DSE rmq 5.7 1)

c-ex $C^\infty \not\Rightarrow$ DSE rmq 5.7 2)

PROP : DSE fct paire et impaire

PROP : critère pour mq qu'on est DSE

EX Taylor Reste intégral on mq exp est DSE sur $\mathbb{R}$ et $\exp(x) = \sum_{k=0} \frac{x^k}{k!} \ \forall x \in \mathbb{R}$ 6.1 p 248

TRI pour mq cos et sin sont DSE sur $\mathbb{R}$

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$ $\sin(x) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \forall x \in \mathbb{R}$

(illustre la prop d'avant - portée et importée)

EX : Taylor - Lagrange 5.10

2 - Opérations Amr p 244

PROP : Ens. des fct DSE muni de + et × est une $\mathbb{C}$-algèbre

prop 5.12 - 5.13 Amr p 244/245

PROP ∂ d'un DSE 5.14 p 245

Appli : nombre de Bell] DEV

PROP : intégrat° d'un DSE p 246

ex : on obtient DSE de $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \ \forall |x|<1$ 6.5 Amr p 250

on a le DSE de $\ln(1+x)$: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ pour $x \in \mathbb{R}$ $|x|<1$ 6.4 p 250

Méthode de l'équa diff pour trouver le DSE Amr p 246

ex : Trouver le DSE de $(\arcsin(x))^2$ on obtient

$(\arcsin(x))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$ p 246.

en lien avec
equa diff et DSE.

3. Analycité Tauvel chap 4

DEF : Fct analytique

EX : $z \mapsto \frac{1}{z}$ analytique sur $\mathbb{C}^*$

THM : si $\sum a_n z^n$ a un rayon R, sa somme est analytique sur $D(0,R)$

3.1 Prolongement analytique p 52

THM : Pcipe prolongement analytique

cor : Si f, g 2 fct analytiques sur $U \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe si $f = g$ au voisinage d'un pt de U on a $f = g$.

EX : calcul de la fct caractéristique loi normale

EX : Prolongement de Γ sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

3.2 PCIPE ZEROS ISOLES p 52

Thm zeros isolés. 4.3.3

cor : $U \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe. f analytique sur U. non identiquement nulle et $f(u) = 0$ avec $u \in U$.

$\exists ! k \in \mathbb{Z}$:

(i) $f^{(k)}(u) \neq 0$ $\quad f^{(p)}(u) = 0 \quad \forall\ 0 \leq p \leq k-1$

(ii) Premier terme non nul du DSE de f au vois de u est $a_k (z-u)^k$ $\quad a_k \neq 0$

(iii) $\exists\ V$ voisinage de u ds U et h analytique sur V tq $f(z) = (z-u)^k h(z)$ et $h(u) \neq 0$ au voisinage de u

on dit que k = multiplicité du zero u de f.

App exo 4.1 p 54

+ ex $(1+x)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

avec $R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$

$R = \infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$.