Amrani = Suites et séries numériques, suites et séries de fct°
Gall = Gallouët, Herbin mesure, intégrat°, probabilités.

Tau = Tauvel Analyse complexe

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

$\times$ ensemble non vide. $(E, \|\cdot\|)$ evn de dim finie (donc complet).

I. CONVERGENCE

1. Suites de fonctions. Amrani p139 → 143

Def 1 = CVS d'une suite de fonctions.
Ex 2 = $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$
Def 3 = CVU d'une suite de fonctions.
Prop 4 = CVU ⇒ CVS.
C-ex 5 = $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$: réciproque fausse.
Prop 6 = Si il existe une suite (x_n) de points de X tq $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tend pas vers 0 alors f_n ne CV pas uniformément vers f sur X.
Ex 7 = $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ en $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$.
Prop 8 = Critère de Cauchy uniforme
f_n CVU sur X ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall p \geq N\ \forall x \in X\ \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon$.
Rq 9 = ⇐ due à la complétude de E.
Ex 10 = ex p185 limite uniforme de fct° polynomes.
Def 11 = $\|\cdot\|_\infty$ norme de la CVU.
Prop 12 = f_n CVU vers f ssi $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
bornées
App - Thm 13 = Weierstrass. ZQ p518 ou Amrani p156

2. Séries de fonctions. Amrani p189 → 195

Def 14 = série de fonctions, somme partielle
Def 15 = CVS d'une série de fonctions.
Ex 16 = $\sum_{n \geq 0} x e^{-nx}$ cvs sur $\mathbb{R}^+$
Def 17 = reste d'une série.
Def 18 = CVU d'une série de fonctions.
Rq 19 = CVU ⇒ CVS d'après 1).
C-ex 20 = $\sum x e^{-nx}$ recip fausse.
Prop 21 - Si $\sum f_n$ CVS. $\sum f_n$ CVU ⇔ $R_n \xrightarrow{CVU} 0$.
Prop 18 bis = $\sum f_n$ CVU ⇒ f_n CVU 0.
Prop 22 = Critère de Cauchy uniforme : $\sum f_n$ CVU ssi
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall p \geq 1\ \forall x \in X\ \|f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)\| \leq \varepsilon$

Def 23 = CVA d'une série de fonctions.
Prop 24 = CVA ⇒ CVS.
C-ex 25 = $\sum \frac{(-1)}{n^x}$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas CVA.
Def 26 = CVN d'une série de fonctions.
Ex 27 = $\sum x e^{-nx}$ CVN sur $[a, +\infty[$, $a > 0$.
Thm 28 = CVN ⇒ CVA et CVU et $\|\sum f_n\|_\infty \leq \sum \|f_n\|_\infty$.
C-ex 29 = $f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(x)$. CVA et CVU mais pas CVN.
Thm 30 = TSSA.
Ex 31 = $\sum (-1)^n / n^x$ CVU sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

3. Régularité de la limite. m̂ théo pour suites et séries

Prop 32 = Transmission de la continuité par CVU. p146
Ex 33 = e^{-nx} ne CVU pas, $\sum \frac{e^{-nx}}{n^2}$ continue sur $\mathbb{R}$.
Thm 34 = double limite ← ou I intervalle
Thm 35 = f_n $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, $f_n(x_0)$ CVS, (f_n') CVU vers g alors f_n CVU vers $f \in \mathcal{C}^1$, $f' = g$.
C-ex 36 = $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$ f_n $\mathcal{C}^\infty$ mais f non dérivable en 0
Ex 37 = $\zeta(x) = \sum 1/n^x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Rq 35 bis = On peut faire par récurrence pour $\mathcal{C}^p$ et $\mathcal{C}^\infty$

II INTEGRABILITE

1. Convergence dans un espace mesuré. Gall

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
Def 38 = On dit que f_n cv p.p vers f s'il existe une partie A de $\mathcal{E}$ négligeable tq $\forall x \in A^c$ $f_n(x)$ cv $f(x)$. p124
Def 39 = cv dans L^p. p279
Prop 40 = TCVD. p279
Prop 41 = récip partielle : cv L^1 ⇒ cv p-p à sous suite près.
C-ex 42 = cv L^1 qui ne cv pas p-p

2. Interversion limite et intégrale.

Thm 43 = cv monotone. p165
Thm 44 = Fatou p167
Thm 45 = Beppo Levi p179

Amrani

p151 Prop 46 = $f_n \xrightarrow{CU} f$ $[a,b] \Rightarrow \int_a f_n \to \int_a f$.

Prop 47 = cas CU sur tout compact en $\oplus$ même conclusion.

Ex 48 = $(\sin^n x)$ sur tout $[0,a]$: $\lim \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = 0$

p155 Thm 49 = TCVD

Ex 50 = $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1} dx = 0$.

3- Interversion somme et intégrale

p199 Thm 51 = intégrat° terme à terme sur un segment - csqce de prop 46.

p215 Ex 52 = $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}/n^n$

p200 Thm 52 = interversion sur un intervalle quelconque.

Ex 53 =

III EXEMPLES DE SÉRIES.

1- Séries entières. Amrani

p229 Def 54 = série entière.

Prop 55 = Lemme d'Abel.

Def 56 = rayon de cv.

Prop 57 = produit de Cauchy

p240 Prop 58 • intégration de la fonction somme

• dérivation de la fonction somme.

Ex 59. $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

Def 60 = DSE

Prop 61 = Taylor ~ unicité de DSE

App 62 = Nombre de Bell.] DVLPT

p298 2- Séries de Fourier. Amrani

Def 63 = Coefficients de Fourier, série de Fourier.

p310 Thm 64 = Formule de Parseval

Thm 65 = thm de Dirichlet : CVS de la série de Fourier.

Thm 66 = $C^{1pm}_{2\pi} \cap C^0$: CVN de la série de Fourier.

App 67 = $\sum 1/n^2 = \frac{\pi^2}{6}$. + equat° de la chaleur] DVLPT p316

3- Séries holomorphes. Tau

$H(U)$ ens des fonctions holomorphes.

CU sur tt compact, CN sur tt compact. p89

Prop 68 = $f_n \in H(U)$, $\sum f_n$ CU sur tt compact alors $\sum f_n \in H(U)$ p90

et CU sur tt compact de $\sum f_n^{(k)}$ // CN.

Def 69 = CVU pour une suite de fonctions meromorphes. CVN p109

~~(Prop 70 = $(\sum f_n)' = \sum f_n'$ pour fn meromorphes)~~

App 71 = Prolongement de la fonction gamma] DVLPT 2

↳ def CVN + prop 68

⚠ voir s'il y a assez de place pour 3.