G = Gorret = De l'intégration aux probabilités
Gour = Gourdon Analyse
Rouvière (Rouv)
Li = Analyse fonctionnelle

239 — Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Ex et Applications.

Soit (X,μ) un espace mesuré et soit E un espace métrique.
On étudie $F = t \in E \longmapsto \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$ où $f : E \times X \to \mathbb{C}$.

Thm 1 (Convergence dominée).

I. REGULARITE ET ETUDE ASYMPTOTIQUE. G p57

1. Continuité.

Thm 2 (Continuité sous le signe intégral). G p66
Rq 3 = On peut dominer sur un voisinage.
Ex 4 = $\Gamma : x \in]0,+\infty[\longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$ est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.
C-ex 5 voir Hauchecorne p224

2. Dérivabilité. Ici E est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Thm 6 (Dérivabilité sous le signe intégral) G p66
Rq 7 = On peut dominer sur un voisinage.
Ex 8, Γ est dérivable et $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \log(t)\,dt$ $x > 0$.
Thm 9 (Classe $\mathcal{C}^p$ sous le signe intégral) Gour p158 cas $\mathcal{C}^1$
App 8 bis = Intégrale de Gauss Gour ex 2 p163
Ex 10 = Γ est de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout p.

3. Holomorphie Ici E est un ouvert de $\mathbb{C}$ G p71

Thm 11 (Holomorphie sous le signe intégral).
Ex 12 : Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$
App 13. Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. DVLPT
Ex 14 = Fonction caractéristique d'une v.a. gaussienne G p220

4. Etude asymptotique.

Prop 15 = (Intégration des relations de comparaison) Gour p159
App 16 : $\log(x) = o(x^\alpha)$
Thm 17 (Méthode de Laplace) Rouv p339 ~~DVLPT~~
App 18 = $\Gamma(t+1) \sim t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}$.
App 19 : Formule de Stirling.

II. PRODUIT DE CONVOLUTION $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

1. Existence.

Def 20 = Produit de convolution Li p75
Prop 21 : $(f*g)(x)$ existe ssi $(g*f)(x)$ existe. Ds ce cas, $f*g = g*f$.
Prop 22 = existence dans le cas $L^p - L^q$.
Prop 23 = existence dans le cas $L^1 - L^\infty$ p80
Prop 24 = existence dans le cas $L^1 - L^1$ p81
Ex 20 bis = $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$ ex 1 p98
Prop 25 = inégalité de Young ex 9 p100

2. Unité approchée et régularisation

Def 26 = unité approchée. p83
Ex 27 = construction avec une densité de proba p82
Thm 28 = Convergences de $\varphi_n * f$ vers f. p82
App 29 = $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dense dans $L^p(\mathbb{R})$ $1 \leq p < \infty$. p85
Ex 30 = Fejer ⚠ def du produit de convolution ds le cas périodique. p59

III TRANSFORMATION DE FOURIER.

1. Généralités. Li p87

Def 31 = • transformée de Fourier
• transformation de Fourier
Prop 32. $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
Prop 33. $\widehat{f*g} = \hat{f} * \hat{g}$.
Thm 34 = $\mathcal{F} = L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ $\mathcal{C}^o$ de norme 1.
Thm 35 (Inversion sur $L^1(\mathbb{R})$)
Cor 36 = $\mathcal{F} = L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ injective.
App 37 = Densité des polynomes orthogonaux OA DVLPT
Thm 38 = (Fourier-Plancherel)
Ex 35 bis : Calcul de $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ ex 13 p101

2- Fonctions caractéristiques. G p 212

Def 39 = Fonction caractéristique.

Thm 40 = Caractérise la loi.

Ex 41 = $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{B}(\lambda)$, ..., $\mathcal{E}(1)$.

Ex 42 = Cas à densité.

Prop 43 = $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \Phi_{X+Y} = \Phi_X \Phi_Y$.

C-ex 44 =

Prop 44 = $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \Phi_{(X,Y)} = \Phi_X \Phi_Y$

Prop 45 = Liens avec les moments.

Thm 46 (Levy). p 276. (admis)

App 47 (TCL) 277

Essentiellement inspiré du plan de Lucile LAULIN et Mériadec CHUBERRE.