235

Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales

Amrani
Gallouet

LI

I CVU et INTERVERSION Amr.

DEF CVS et CVU.
PROP : CVU ⇒ CVS réciproque fausse
rmq : ces résultats se transposent pour les séries.

1- SUITES DE FCT ET INTERVERSION Amr

Thm CVU préserve la c. p146 cor 2.2 Amr
CEX : $f_n(x) = e^{-nx}$ CVS vers la fct $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$
de la CV n'est $\emptyset$ uniforme. 2.3 p 146
Thm (dble limite) Amr p146 thm 2.5
EX
CEX

Thm CVU et d cas evn (ona juste d) thm 3.1 p148
cor CVU et d sur un Banach (cas C^1) thm 3.3 p 150
rmq on a un thm valable ds le cas C^p rmq 3.4 p151
EX
CEX = Hauchecorne p240
Thm Interversion CVU et $\int$ de Riemann sur $[a,b]$.
C-ex : Hauchecorne p244 thm 4.1 Amr p 151
EX Gou ex 1 p224
Thm (affine le thm précdt) thm 4.2 Amr p152
EX : $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = 0$ ex 4.3 p153

2- SERIES DE FCT ET INTERVERSION

a- Thm d'interversion Amrani p195 → ?

Thm (dble limite) pour les séries THM 2.1 p195
rmq c'est une interversᵒ $\lim \sum$ rmq 2.2 p196
C-ex : Hauchecorne p259
Thm la CVU préserve la c de la somme de la série
EX $x \mapsto \sum_{n=1} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ et c sur $\mathbb{R}$ ex 3.3 p196
Thm (d terme à terme)

Thm (cas de Banach). thm 4.2 p198
rmq : interversion d (limite) et somme rmq 4.3 p198
rmq généralisatᵒ pour le cas C^k. prop 4.4 p198
EX : $\zeta : x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ est indéfinimᵗ d.

Thm Intégratᵒ terme à terme sur un segmᵗ
rmq : on a $\emptyset$ besoin de CVU pr interventir $\int$ et $\sum$ sur un segmᵗ
CEX :

b- application aux ~~Cas des~~ séries entières Amr.

DEF série entière p229
Thm si $|z|<R$ alors $\sum a_n z^n$ CVA
si $|z|>R$ alors $\sum a_n z^n$ DVGE thm 1.4 p 230
DEF rayon de cvgence 1.6 p 231
Sur le bord on ne sait rien. p231 rmq 1.7
~~Thm Abel angulaire et taubérien faible~~ || DEV
PROP : La somme d'une série entière est c ds l'int du disq de cvgence thm 4.2 p 239
Thm Intégratᵒ fct somme Amr thm 4.6 p 240
Thm dérivatᵒ de la fct somme Amr p240 4.9

II - THEORIE DE LA MESURE - INTERVERSION

Gall + Marco - p210

Soit (E,T,m) un espace mesuré.

1- Fonctions mesurables positives Gall

Thm (cvgence monotone) p165 thm 4.16
EX
Appli : Interversᵒ $\sum$ et $\int$ cas mesurable positif + ex
+ appli = Borell-Cantelli cor 4.18 p ~~157~~
Lemme (FATOU) p167 4.19

Marco p 280 + test 14.4-

Thm Fubini - Tonelli thm 7.7 p 417

Appli calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$ (~~ex Maison~~) narco p 274

2- CAS DES FCT L^1 Gall

a- CVGENCE DOMINEE ET ESQUENCES

Thm cvgence dominée thm 4.44 p 179

EX

THM (Reciproque de Lebesgues) thm 449 p 182

rmq faux sans extract° p 178

Thm Serie absolum^t cvgte (intervers° $\int$ et $\sum$)
thm 4.47 p 181

EX ex = 14.4 narco p 283

c-ex = narco p 250 -

b- Thm FUBINI Gall

Thm Fubini thm 7.12 p 420

CEX rmq 7.14 p 422 + ex $\mathcal{F}(f*g)$

maison (Appli : cas où les mesures sont celles de comptage.

EX Nbre de Bell

\+ interversion $\sum$ et $\int$ narco p 282 + exo

III - Integrales à parametres

~~III régularité des intégrales à paramètres~~

1. THM DE $\mathcal{C}$, $\underline{d}$ et holonorphie Gall

THM $\mathcal{C}$ sous l'intégrale thm 4.52 p 183 Gall

EX Γ est $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}^+$ (Maison)

ex : $\mathcal{F}: L^1 \to \mathcal{C}^0$

THM $\underline{d}$ s/s l'integrale thm 453 p 184 Gall

EX Γ est $\underline{d}$ sur $\mathbb{R}^+$ (Maison)

THM holonorphie (lim fct holo)

EX Γ est holo sur $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$

(~~Maison~~) narco p 279

Thm prolongem^t de Gamma sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$. || DEV

2- CONVOLUTION ET TRANSFO DE FOURIER. LI

DEF convolée p 75

Thm EXISTENCE CAS $L^1 - L^1$ p 81

DEF Transformée/ Transformat° de Fourier cas L^2

THM si $f \in L^1$ alors $\mathcal{F}(f)$ est $\mathcal{C}$.

THM $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$

THM $\mathcal{F}(f^{(k)})$ et $\mathcal{F}(f)^{(k)}$ exo

exo 11 p 101 LI

) p 87-88

Enlever III 2) si pas la place
Le font probable si y a déjà tous les ex et cex

DVLPTS = - Intégrale de Fresnel
- Gamma
- Equation de la chaleur