234

ESPACES L^p $1 \le p \le \infty$

Soit (E, T, m) espace mesuré $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I- CONSTRUCTION

1. Espaces $\mathcal{L}^p$ $1 \le p \le \infty$ Gall

a- Pour $1 \le p < \infty$ Gall p 275

DEF 1 Espace $\mathcal{L}^p$ $1 \le p < \infty$ p 275 DEF 6.1

DEF 2 $\|\cdot\|_p$ p 275 DEF 6.1

PROP 3 $\mathcal{L}^p(E, T, m)$ est un ev sur $\mathbb{R}$

LEMME 4 Ineg de Young

LEMME 5 Hölder

LEMME 6 Minkowsky

) p 276 - 278

PROP 7 $\|\cdot\|_p$ est une semi norme sur $\mathcal{L}^p$

rmq 8 $f \in \mathcal{L}^p$ $\|f\|_p = 0$ ssi $f = 0$ pp

b. Pour $p = \infty$. Gall p 282

DEF 9 Espace $\mathcal{L}^\infty$

DEF 10 $\|\cdot\|_{L^\infty}$

LEMME 11 si $f \in \mathcal{L}^\infty$ $|f| \le \|f\|_\infty$ pp.

PROP 12 Ds le cas $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ prop 6.18 p 283

2. ESPACES L^p $1 \le p \le \infty$.

a- EVN

PROP 13 La relat° d'égalité pp est une relat° d'équivalence

* CAS $1 \le p < \infty$ Gall p 275

DEF 14: Espaces L^p $1 \le p < \infty$.

PROP 15 L^p est un ev sur $\mathbb{R}$.

) p 276

rmq $f \in L^p$ s'il existe $g \in \mathcal{L}^p$ tq $f = g$ pp

on confond f avec la classe d'équivalence de g

$\{h \in \mathcal{L}^p : g = h \text{ pp}\}$

rmq 6.8 p 279

rmq: Hölder tjrs vrai sur L^p

rmq: Minkowsky donne que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur L^p donc $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un evn

* CAS $p = \infty$. Gall p 283

DEF 16 L^∞

PROP 17 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ est une norme sur $L^\infty_{\mathbb{R}}$

rmq 18: on peut aussi définir $L^\infty_{\mathbb{C}}$, $L^\infty_{\mathbb{R}^n}$ qui sont aussi des evn.

b- Complétude

THM 19 RIESZ - FISCHER

II - PROPRIETES DES ESPACES L^p

1. Convergence et comparaison des L^p Gall

a- conv ds L^p

Thm 20 Réciproque de Lebesgue thm 6.11 p 280

CEX 21 dans le LI (pour mq qu'on a besoin de l'extraction)

Thm 21: TCVD p 279 Gall

rmq: TCVD faux pour L^∞ p 285

b- comparaison des L^p Gall p 285

PROP 22 Inclusion ds espace de mesure finie

CEX 23 Faux ds espace de mesure non-finie L^p L^q

PROP 24 Hölder generalisé

Rmq 25 f mesurable sur (E, T) rmq 6.29

$\{p \in [1, +\infty] \; f \in \mathcal{L}^p\}$ est un intervalle

$\|f\|_p \to \|f\|_\infty$

$\exists p_0 < \infty$ tq $f \in \mathcal{L}^p$ $p_0 \le p < \infty$ et $\exists C > 0$ $\|f\|_p < C$

$\forall p \ge p_0$ alors $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \le C$

à voir ...

I De

2. Densité   a priori $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ...

Thm : $C_c(\mathbb{R})$ dense ds $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ $1 \le p < \infty$
Appli : L^p est séparable $1 \le p < \infty$) LI p 77.
Thm : Densité fct étagée

III - STRUCTURE HILBERTIENNE DE L^2

rmq : L^p $p \neq 2$ n'a pas de pdt scalaire
exo 6.24 p 351 Gall

1 - conséquences de la structure hilbertienne

Thm : Pdt scalaire sur L^2. Norme issu du pdt scalaire $(L^2, <,>, \|\cdot\|_2)$ Hilbert p 290 Gall
Espaces de HILBERT
· thm de project° + RIESZ sans écrire
DEF base hilbertienne p 303 Gall
PROP caract base hilbertienne prop 6.63 p 303

3 Applications aux séries de FOURIER

$(L^2_C(]0,2\pi[), B(]0,2\pi[), \lambda)$ espace mesuré
DEF pdt scalaire $(f|g)_2 = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.
PROP $(L^2, <,>_2, \|\cdot\|_2)$ Hilbert
DEF e_n Thm Parseval
Thm : $(e_n)_n$ base hilbertienne de L^2_C ...
cor : $\sum (f|e_n)_2 e_n$ commutativement cvgte et
$f = \sum (f|e_n)_2 e_n$
et $\sum (f|e_n)_2 e_n$ CVG vers f au sens $\|\cdot\|_{L^2}$.
) 6.68 p 309 Gall

3 - Polynômes orthogonaux   OA

DEF poids ρ
Thm : $L^2(I,\rho)$ Hilbert et existence + unicité pol. orthog
Thm : Polynômes orthogonaux $(P_n)_n$ bh de $(L^2(I,\rho), <,>, \|\cdot\|_2)$ ‖ DEV.
Appli : Hermite, Tchebychev, ...

IV - CONVOLUTION ET TRANSFO. FOURIER

1. convolution LI

DEF
PROP $f*g = g*f$
Thm : condit° existence $f*g$
$L^1 - L^1$, $L^p - L^q$ p et q conj - $L^1 - L^\infty$.

2. Transfo Fourier LI p 87 ?

DEF transfo de Fourier dans L^1
DEF suite régularisante
Thm Plancherel extension à $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ‖ DEV