233

METHODES ITERATIVES EN ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE.

C-Ciarlet

$\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Thm 1 : Point fixe de Banach

Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante de rapport k. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$. De plus toute suite $(x_n)_n$ avec $x_0 \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ converge vers a de façon géométrique :

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

I- Introduction aux outils des méthodes itératives

Cp14 → 19

1. Normes matricielles et rayon spectral

Allaire ou p. 412-415

Cp16

Def 2 Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. La norme subordonnée associée à $\|\cdot\|$ notée $|||\cdot|||$ est définie par

$$|||A||| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \text{pour } A \in M_n(\mathbb{K})$$

Lemme 3 • $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad |||AB||| \leq |||A|||\ |||B|||$.

• On a $|||I_n||| = 1$ où I_n matrice identité

• $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad |||A||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\| \leq 1} \|Ax\|$

rmq 4 Il existe des normes matricielles qui ne sont pas subordonnées. Par exemple, $|||A||| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ n'est pas subordonnée car $\|I_n\| = \sqrt{n}$.

Ex 5 (thm 5) pour $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ pour $x \in \mathbb{K}^n$

on a

$$|||A|||_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$|||A|||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Cp8

DEF 6 Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, le rayon spectral $\rho(A)$ de A est définie comme le maximum des modules des valeurs propres de A.

Cp16

Prop 7 $|||A|||_2 = |||A^*|||_2 = \cancel{\rho(A)}$ où A^* adjoint de A

$= \sqrt{\rho(A^*A)}$

Cp18-19

Prop 8 • Soit $|||\cdot|||$ une norme subordonnée. On a $\rho(A) \leq |||A|||$ pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$.

• Réciproquement $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists |||\cdot|||$ tel que $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$

On a un lien entre $|||\cdot|||$ et $\rho(A)$

Thm 9 $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad \lim_{n \to \infty} |||A^n|||^{1/n} = \rho(A)$ Cp22

Thm 10 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a C-p21

$$\lim_{k \to \infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1$$

$$\iff \exists |||\cdot||| \text{ norme subordonnée } |||A||| < 1.$$

2- Conditionnement

Allaire p ~~415-416~~ + ou ~~Cp28~~

DEF 11 Soit $|||\cdot|||$ une norme subordonnée, On appelle conditionnement de $A \in GL_n(\mathbb{C})$ notée $\text{cond}(A)$ définie par $\text{cond}(A) = |||A|||\ |||A^{-1}|||$. Cp29

rmq • $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1}) \geq 1$ Cp31

• $\text{cond}_2(A) = |||A|||_2\ |||A^{-1}|||_2 = \dfrac{|\lambda_n(A)|}{|\lambda_1(A)|}$ où

λ_n et λ_1 sont resp la plus grande (resp plus petite) valeur propre de A en module.

• pour U unitaire $\text{cond}_2(U) = 1$.

prop 12 **conditionnement et petite perturbation** ~~Cp28~~-29 Cp30

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Soit $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

(1) soit $x \in \mathbb{C}^n$: $Ax = b$ $\quad A(x + \delta x) = b + \delta b$

alors $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

(2) x et $x + \delta x$ sont solutions de $Ax = b$; $(A + \delta a)(A + \delta x) = b$

alors $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \text{cond}(A) \dfrac{\|\delta a\|}{|||A|||}$

Interprétation : le problème est bien conditionné lorsque le conditionnement est proche de 1

3. Théorème de Gershgorine   Filbet p61

DEF 13 Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est à diagonale strictement dominante si $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$.

prop 14 : une matrice à diagonale strictement dominante est inversible

thm 15 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Toute valeur propre de A appartient à l'un au-moins des disques D_i où
$$D_i = \{ z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| < \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \}$$

II - Méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires

Cp96-97

1. Principe des méthodes itératives   Allaire p431

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On cherche à décomposer A tel que $A = M - N$ où M inversible "facile à inverser"

la méthode itérative est définie par
$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ M x_{k+1} = N x_k + b \text{ par } k \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

si la suite $(x_k)_k$ converge vers x alors $(M-N)x = Ax = b$ et donc la limite x est solution de $Ax = b$.

DEF 16 une méthode itérative converge si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite $(x_k)_k$ converge vers la solution exacte x de $Ax = b$.

DVLPT

Lemme 17 Critère de convergence
La méthode itérative $(*)$ converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

2. Étude de quelques méthodes classiques   ~~Allaire p432~~ Cp95

*** MÉTHODE DE JACOBI**

correspond à $M = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots a_{nn}) \stackrel{\text{def}}{=} D$
$N = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots a_{nn}) - A =$

thm 18 Dans le cas où A est symétrique réelle, la méthode de Jacobi converge si A et $2D - A$ sont définies positives

*** MÉTHODE DE GAUSS SEIDEL**   Cp100

on décompose $A = D - E - F$ où $-E$ matrice triang inférieur, $-F$ matrice triang sup, $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots a_{nn})$

Gauss Seidel : $M = D - E$ $N = F$ Allaire p433

rmq D doit être inversible pour que M le soit et que la méthode soit bien définie.

thm 19 Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors la méthode de Gauss-Seidel converge.

rmq 20 : Lien avec résolution de systèmes linéaires
une itération par Gauss-Seidel $(D - E) u_{k+1} = F u_k + b$
une itération pour Jacobi $D u_{k+1} = (E+F) u_k + b$
à la $(k+1)$ième itération où $u_{k+1} = (u_1^{k+1}, \dots u_n^{k+1})$

rmq 21 Avantage Gauss-Seidel / Jacobi
Par la remarque 20 on a besoin de n données pour Gauss-Seidel et $2n$ données pour Jacobi à chaque étape.

* si Gauss-Seidel converge, on peut introduire un réel $\omega \neq 0$ tel que $(*)$ soit remplacé par
$\left(\frac{D}{\omega} - E\right) u_{k+1} =$ en fonction u_k et ω Ciarlet p101-102

MÉTHODE DE RELAXATION   Cp101

$$M = \frac{D}{\omega} - E \quad \text{et} \quad N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$$

rmq 22 • $\omega = 1$ c'est la méthode de Gauss-Seidel
• il existe ω_{opt} une valeur optimale de ω qui minimise le rayon spectral de $M^{-1}N$ et donc accélère la vitesse de convergence. ~~Allaire p433~~

Prop 23 La méthode de relaxation converge pour $\omega \in]0, 2[$ Cp103

3. Méthodes gradient à pas fixe et à pas optimal

DVLPT : gradient à pas optimal

III - Recherche de valeurs/vecteurs propres

1. Methode de la puissance / Methode de la puissance inverse

Allaire p 442-444

soit $A \in S_n(\mathbb{R})$

Thm 24 : Theoreme spectral

[Dans ce cadre A est diagonalisable en base orthonormée.

on note $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ les valeurs propres de A avec $\lambda_i \leq \lambda_j$ $\forall i \leq j$ et $(e_1, \dots e_n)$ les vecteurs propres associées.

a- Methode de la puissance

on suppose que λ_n est valeur propre simple

But : determiner λ_n, et e_n.

Algorithme on se donne $\varepsilon > 0$.

initialisation $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\|x_0\| = 1$

iterations : Pour $k \geq 1$,

$y_k = A y_{k-1}$ et $x_k = y_k / \|y_k\|$

si $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$ alors on arrête (test de convergence)

Prop 25

Si x_0 est orthogonal à e_n, la méthode de la puissance converge au sens, $\lim_{k \to \infty} \|y_k\| = \lambda_n$

$\lim_{k \to \infty} x_k \to \pm e_n = x_\infty$.

et les vitesses de convergence sont données par $\left|\|y_k\| - \lambda_n\right| \leq C \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^{2k}$ et $\|x_k - x_\infty\| \leq C \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^k$.

b- Methode de la puissance inverse

But : recherche de λ_1 et de e_1.

en supposant que λ est simple et $\lambda_1 > 0$.

Algorithme

Initialisation $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\|x_0\| = 1$

Iterations Pour $k \geq 0$

$A y_k = y_{k-1}$, $x_k = y_k / \|y_k\|$ et on teste si $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$ (test de convergence).

Thm 26 Si x_0 pas orthogonal à e_1, la méthode converge

[avec $\frac{1}{\|y_k\|} \to |\lambda_1|$; $\lim_{k \to \infty} x_k = \pm e_1$ et la convergence $\left|\frac{1}{\|y_k\|} - |\lambda_1|\right| \leq C \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^{2k}$; $\|x_1 - x_\infty\| \leq C \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^k$

2. METHODE DE JACOBI

Ciarlet p114-115

Recherche de toutes valeurs propres (eventuellement vect propre) d'une matrice symétrique réelle.

Soit A symétrique réelle : thm 24 $\exists\, O \in O_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tO A O = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$

Méthode de Jacobi (suite $A_k)_k$.

- $A_1 := A$
- construire $(\Omega_k)_k \in O_n(\mathbb{R})$: $A_{k+1} = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k$ et converge vers $\mathrm{diag}(\lambda_i)$ a permut. près

Les matrices orthogonales Ω_k sont données :

Thm 27 Si $p, q \in \mathbb{N}$ $1 \leq p < q \leq n$ $\theta \in \mathbb{R}$

$$\Omega = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & \\ & & & 1 & & \\ & & -\sin\theta & & \cos\theta & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad \uparrow p \qquad \uparrow q \end{array}$$

si A sym, alors $B = {}^t\Omega A \Omega$ sym et $\sum_{i,j} b_{ij}^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$

si $a_{pq} \neq 0$, il existe une seule val de θ ds l'ensemble $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$ tq $b_{pq} = 0$ c'est la seule solut de $\cot an\, 2\theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$. Le nb θ ainsi choisi : $\sum_{i=1}^n b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2$

Thm 28 :

[La suite $(A_k)_k$ cvge vers $\mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)})$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Donc la méthode de Jacobi cvge.

+ recherche de $\overrightarrow{vp}$ Ciarlet p118

. 3. Méthode QR : Ciarlet p123 → 129

Plan essentiellement repris de Anaïs PERRIN et Yoan PINARD

IV