Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Développements :

Ellipsoïde de John-Loewner(FGN Al3), Dini-Cantelli, Processus de Galton Watson .

Bibliographie :

Rombaldi, Elements d'analyse réelle (Rom), Ramis Deschamps Odoux, Cours de mathémtatiques spéciales 3 (RDO), Gourdon, Analyse (G), Garet, De l'intégration aux probabilités, Objectif agrégation (OA)

Plan

1 Fonctions monotones

1.1 Définitions et propriétés [RDO]

Définition 1 (RDO p.118)**.** Fonctions (strictement) croissantes - (strictement) décroissantes.

Exemple 2. $x \to x+2$ est stt croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit D partie de $\mathbb{R}$.

Proposition 3 (RDO prop2 a) p.118)**.** *f injective ssi strictement monotone et induit une bijection de D sur $f(D)$.*

Proposition 4 (RDO prop2 b) à f) p.118)**.** *Opérations sur fct monotones.*

Théorème 5 (G. p.228)**.** *Thm Dini.*

Théorème 6. *Thm limite monotone*

Corollaire 7 (RDO cor1 p.119)**.** *Application croissante et a pt adhérent à $D\cap]a,\infty[$. On a EQU :*
f a une limite finie a droite en a ssi f minorée dur $D\cap]a,\infty[$

Corollaire 8 (RDO cor2 p.119)**.** *$f : I \to \mathbb{R}$ est monotone et $a \in I$. Si $a \neq sup(I)$ alors f a une limite à droite finie $f(a^+)$ et $a \neq inf(I)$ alors a une limite finie $f(a^-)$.*

1.2 Monotonie et continuité [RDO]

Proposition 9 (RDO p.120)**.** *Fonction monotone a un nb dénombrable de discontinuité.*

Proposition 10 (RDO p.121)**.** *Soient I intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. On a f continue sur I ssi $f(I)$ intervalle de $\mathbb{R}$*

Corollaire 11 (RDO thm2 p.121)**.** *Theorème des fct réciproques.*

Exemple 12 (RDO P.127 et P.128)**.** Dérivées de *arcsin* et *arccos*.

Théorème 13 (RDO thm3 p.121)**.** *$f : I \to J$ ou I et J intervalle de $\mathbb{R}.f$ homéo alors f stt monotone.*

1.3 Monotonie et dérivabilité [RDO]

Théorème 14 (RDO THM 1 p.122)**.** *f continue et dérivable à droite de dérivée f_d. Equ entre sens variation de f et signe de f'_d.*

Théorème 15 (RDO THM2 p.122)**.** *Caractérisation des appli stt monotones. f stt croissante (resp. decroissante) ssi $f'_d \geq 0$ (resp $f'_g \leq 0$) et $X = \{t \in Int(I) : f'_d(t) = 0\}$ soit d'intérieur vide.*

Contre-exemple 16.

1.4 Comparaison série-intégrale

Gourdon p.203

1.5 Un exemple de fonctions monotones : Fct de répartition [Garet]

Définition 17 (Garet p. 104)**.** Fonction de répartition

Proposition 18 (Garet p. 105)**.** *propriétés*

Proposition 19 (Garet p. 104)**.** *Caractérise la loi*

Théorème 20 (Glivencko-Cantelli)**.** *[Garet p. 304]*

2 Fonctions convexes [Rom]

Soit E un espace-vectoriel. Soit $I \subset E$ convexe.

2.1 Définition et opérations

Définition 21 (Rom p 233)**.** Fonction convexe - strictement convexe - concave

Exemple 22 (Rom p.235)**.**
- Une norme est convexe (ineg trianulaire).
- Une fonction affine est concave et convexe.

Proposition 23 (Rom. p.235)**.** *Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.*

Remarque 24 (Rom p.235)*.*
- Le produit de fonction convexe n'est pas forcément convexe. Par ex. $x \mapsto x^3$ n'est pas convexe alors que $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ le sont.
- La composée de fct convexe pas forcement convexe. Ex. Composée d'une convexe f non affine avec $x \mapsto -x$ donne $-f$ qui est concave.

Proposition 25 (Rom p.236)**.** *Limite simple de fonctions convexes est convexe.*

2.2 Caractérisations des fonctions convexes

Théorème 26 (Rom 9.1 - p.233)**.** *Caractérisation de la convexité avec la convexité de l'épigraphe.*

Définition 27 (Rom p.238)**.** Définition de la fonction pente.

Théorème 28 (Rom 238)**.** *Théorème équivalence de la convexité et inégalité des pentes+ croissance pentes + schéma p.239 dans annexe*

Proposition 29 (Rom 9.6 p.237)**.**
$f : I \to \mathbb{R}$ *convexe ssi* $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall (x,y) \in I^2.$

Corollaire 30 (Rom p. 240)**.** *cste ssi convexe majorée*

2.3 Régularité et convexité

2.3.1 En dimension 1

Théorème 31 (Rom - thm9.12 - p.242)**.** *Si on est convexe on a des derivées à droite et à gauche. en tout point de l'intérieur de I. Les fcts derivées à droites et gauches sont croissantes.*

Corollaire 32 (Rom - cor9.3 - p.242)**.** *Fonction convexe sur I est continue sur l'intérieur de I.*

Contre-exemple 33 (Rom - rmq9.2 - p.243)**.** Faux sur I tout entier.

Proposition 34 (Rom - thm9.13 - p.243)**.** *Si f convexe sur Int(I) et continue sur I alors f convexe sur I.*

Théorème 35 (Rom - thm9.14 - p.243)**.**
Soient I intervalle réel ouvert non-vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to R$. On a EQU :
f convexe sur I.
f continue dérivable à droite sur I de dérivée droite croissante.

Théorème 36 (Rom - thm915 - p.244)**.** *Si f est derivable alors on a EQU : f convexe sur I - f' croissante - f située au-dessus de ses tangentes.*

Théorème 37 (Rom - thm9.18 - p.246)**.** *Si f deux fois dérivable sur I. f convexe (resp concave) ssi $f'' \geq 0$ (resp. $f'' < 0$).*

Exemple 38 (Rom p.246)**.** exp est convexe sur $\mathbb{R}$. log est concave sur $\mathbb{R}^{+,*}$

Théorème 39 (Rom - thm9.17 - p.245)**.** *Si f est derivable alors on a EQU : f strict convexe sur I - f' strict croissante - f située strict au-dessus de ses tangentes.*

Application 40. Processus de Galton-Watson

Théorème 41 (Rom p.246)**.** *f est strictement convexe ssi $f'' > 0$ et zéros de f sont isolées.*

Exemple 42 (Rom p.246)**.** $x \mapsto x^p$ stt convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$ pour $p > 1$.

2.3.2 En dimension supérieure

Théorème 43 (Rom thm9.16 - p.245)**.** *Soit I ouvert d'un evn E et $f : I \to \mathbb{R}$ différentiable. On a EQU :*
(i) f convexe sur I.
(ii) $\forall (x,y) \in I \quad (df(x) - df(y)).(y-x) \geq 0.$
(iii) $\forall x,y \in I \quad f(x) \geq f(y) + df(y).(x-y).$

3 Inégalité de convexité - Optimisation

3.1 Inégalité de convexité

Théorème 44 (Rom - thm9.21 p.249)**.** *Jensen*

Exemple 45. Jensen en proba

Avec la convexité et stricte convexité de exp,

Proposition 46 (Rom p.247)**.** $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq x+1.$
$e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a+e^b}{2}$

Avec la concavité et stricte concavité de ln,

Proposition 47 (Rom p.247)**.** $ln(x) \leq x-1$ *pour* $x > 0$.

Proposition 48 (Rom - lemme9.1 - p.247)**.** *Inégalité de Young*

Application 49. Inégalité de Hölder et Minkovsky.
Permet de montrer que pour $p \geq 1$, $||.||_p$ est une norme.

Proposition 50 (Rom p.252)**.** *Comparaison moyennes gémoétriques et arithmétiques.*

Application 51 (FGN)**.** Concavité logarithmique du déterminant.

Application 52 (FGN)**.** Ellipsoïde de John-Loewner

3.2 Optimisation et fonctions convexes [OA]

Proposition 53 (Rouv p. 371 ex 119 ou Rom p. 241 à adapter dimension)**.** *Point critique et min global*

Proposition 54 (OA p.30 ou Rom p.242)**.** *Pour une fct convexe, min local est global.*

Proposition 55 (OA p.30)**.** *strict convexe* $\Rightarrow$ *unicité du minimum*

Proposition 56 (OA p.30)**.** *Min local ssi* $d^2 f$ *positive*

Proposition 57. *Sur un espace de Hilbert séparable* H*,* U *convexe fermée,* J *convexe, dérivable coercice alors elle admet un minimum et l'atteint*