G: Gourdon Analyse
P: Pommelet Cours d'analyse
Rombaldi: éléments d'analyse réelle
Méthodix Merlin analyse
ZQ: Zuily Queffelec.
Rouvière: petit guide de calcul diff

224 — Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Soit E un $\mathbb{R}$-evn, X un espace métrique.

I. DEFINITIONS ET PREMIERS EXEMPLES

1- Relations de comparaison Gourdon + Pommelet

G p86 ou Pom

Def 1: Soient f, g deux fonctions de $D \subset X$ dans E, x_0 un pt d'accumu de D. × On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 si $\exists C>0\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0)\ \forall x \in V \cap D\ \ \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$.
On note alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} O(g(x))$

× On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si $\forall \varepsilon>0\ \exists V\in\mathcal{V}(x_0)\ \forall x\in V\cap D\ \ \|f(x)\| \leq \varepsilon\|g(x)\|$
On note alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$

× On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si $f(x)-g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$. On note alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$

Ex 2: $e^z - 1 - z \underset{z\to 0}{=} o(z)$

P p119

Prop 3: Si f et g sont à valeurs réelles,
- $f(x) \underset{x_0}{=} O(g(x))$ ssi $\exists V\in\mathcal{V}(x_0)$, $\exists h : V^{\cap D} \to \mathbb{R}$ bornée tq $\forall x\in V\cap D\ f(x) = h(x)g(x)$
- $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ ssi $\exists V\in\mathcal{V}(x_0)$, $\exists \varepsilon : V\cap D \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0 tq $\forall x\in V\cap D\ f(x) = \varepsilon(x)g(x)$
- $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ ssi $\exists V\in\mathcal{V}(x_0)$, $\exists \alpha : V\cap D \to \mathbb{R}$ $\alpha \xrightarrow[x_0]{} 1$ tq $\forall x\in V\cap D\ f(x) = \alpha(x)g(x)$.

Ex 4: • $f(x) \underset{x_0}{=} o(1) \iff f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$
• Si $f \xrightarrow[x_0]{} l \neq 0$ et $f\sim g$ alors $g \xrightarrow[x_0]{} l$

Prop 5: • Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$ alors $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$
• Si $f\sim g$ alors $\forall \alpha\in\mathbb{R}\ f^\alpha \sim g^\alpha$.

Rq 6: × $f_1\sim f_2$ et $g_1 \sim g_2 \not\Rightarrow f_1+g_1 \sim f_2+g_2$
C-ex: $x+2 \underset{+\infty}{\sim} x+1$, $-x \underset{+\infty}{\sim} -x$ mais $2 \underset{+\infty}{\not\sim} 1$ G p86
× $f_1\sim f_2 \not\Rightarrow e^{f_1} \sim e^{f_2}$
C-ex: $f_1 = 1+x^2$ $f_2 = x^2$, $f \underset{+\infty}{\sim} g$ mais $e^f \underset{+\infty}{\not\sim} e^g$.

3. Développements asymptotiques = une généralisation.

G p86 87

Def 7: On appelle échelle de comparaison, un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies au voisinage de x_0 dans X, sauf éventuellement en x_0, et vérifiant : si $f, g\in\mathcal{E}$, alors $f=g$ ou $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou $g \underset{x_0}{=} o(f)$

Ex 8: × Pour les fonctions réelles
- au $\mathcal{V}(+\infty)$: $\{x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}\}$, $\{x^\alpha (\log x)^\beta;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$.
- au $\mathcal{V}(0)$: $\{x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}\}$.

Def 9: Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Un développement asymptotique à k termes de f par rapport à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ au voisinage de x_0, est une expression de la forme $c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$ tq
- $c_i \in E$ constante, $i\in [\![1,k]\!]$, non nulle
- $f_i \in \mathcal{E}$, $f_{i+1} \underset{x_0}{=} o(f_i)$, pour tout i
- $f = c_1 f_1 + \dots + c_k f_k \underset{x_0}{+} o(f_k)$

Rq 10: Lorsqu'un tel développement existe, il est unique.

Ex 11: $\log(x)(x+1+1/x) = x\log x + \log(x) \underset{+\infty}{+} o(\log(x))$

2. Développements limités (DL) Gourdon

G p87

Dans cette partie, $X=\mathbb{R}$, $D=I$ intervalle non réduit à un singleton.

Def 12: Supposons $0\in I$. Si $n\in\mathbb{N}^*$, on dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, noté $DL_n(0)$ s'il existe $a_0,\dots,a_n\in E$ tels que au voisinage de 0
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

Méthodix p59

Rq 13: • On peut définir les développements limités de f en a en faisant les développements limités en 0 de $t\mapsto f(t+a)$.
• C'est un développement asymptotique par rapport à $\{x^n, n\in\mathbb{N}\}$.

G p87 88

Prop 14: Si f admet un DL d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$, il est unique.

Prop 15: Si f a un $DL_n(0)$: $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ $n\geq 1$.
alors $f(0) = a_0$ et f est dérivable en 0 avec $f'(0) = a_1$.

Rq 16: ⚠ Pour $n\geq 2$, l'existence d'un $DL_n(0)$ n'assure pas l'existence de $f^{(n)}(0)$.
C-ex: $f(x) = \begin{cases} 1+x+x^2+x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ n'est pas deux fois dérivable en 0 mais $f(x) = 1+x+x^2 \underset{x\to 0}{+} o(x^2)$

Thm 17: Formule de Taylor Young.
Si f est n fois dérivable en 0 alors f admet un $DL_n(0)$:
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

G p89

Ex 18 : • $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

• $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$

ZQ p540 555

App 19 = Théorème Central Limite **DEV**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a iid dans L^2. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $m = E[X_1]$, $\sigma^2 = Var(X_1) > 0$. Alors on a $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

b- Opérations sur les DL. Gourdon.

G p88-89

Prop 20 = Si f est dérivable sur I et admet un $DL_n(0)$: $f'(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ alors f admet un $DL_{n+1}(0)$:

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Ex 21. On trouve le DL de $x \mapsto \log(1+x)$ à partir de celui de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Prop 22 = Si f est $n \geq 2$ fois dérivable en 0, $f(x) = \underset{x\to 0}{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)}$ alors $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-1})$

Rq 23 = C'est faux si on n'a pas l'existence de $f^{(n)}(0)$.

Ex 24 : On obtient le DL de sin à partir de celui de cos.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2p+2})$$

Prop 25 = On peut sommer, multiplier et composer des DL.

+ séries de Taylor ~~DVLP~~

App 26 = Calcul de limite.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\tan x - x}{\sin x - x}$ s'obtient à partir de $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{6}$

et $\tan x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\tan x - x}{\sin x - x} = -2$.

Rombaldi p219

App 27 = Position d'une courbe par rapport à sa tangente.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_3(x)$ avec $\varepsilon_3 \xrightarrow[0]{} 0$

La tangente en 0 est la droite $y = x$ d'où $\sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_3(x)$

donc sin est sous sa tangente pour $x > 0$, au voisinage de 0 et au dessus pour $x < 0$, au voisinage de 0.

II APPLICATIONS À LA RECHERCHE DE DVLPTS ASYMPTOTIQUES

1- Pour les suites.

P p115

Thm 28 = Soit $(u_n)_n$ une suite réelle de E tendant vers une limite ℓ (éventuellement infinie), soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ une suite de réels positifs strictement tq $\sum \alpha_n$ diverge. Alors la suite $\left(\frac{\alpha_0 u_0 + \dots + \alpha_n u_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n}\right)_n$ des moyennes pondérées tend aussi vers ℓ.

Rq 29 = On obtient le thm de Cesaro avec la suite constante $\alpha = 1$.

Appli 30 = Recherche d'un équivalent d'une suite récurrente.

$\begin{cases} u_{n+1} = \sin(u_n) \\ u_0 = a \in]0,\pi[\end{cases}$, on a $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$, $\begin{cases} u_{n+1} = \ln(1+u_n) \\ u_0 = \end{cases}$, $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ ou tan p224 Rombaldi

Rouvière p152.

Thm 31 = Méthode de Newton. **DEV**

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ C^2 s'annulant en un unique point $a \in]c,d[$ et tq $f' \neq 0$ sur $[c,d]$. On définit $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 par $\varphi : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Alors • il existe $\alpha > 0$ tq $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$, stable par φ et que la suite récurrente définie par $x_0 \in I$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a.

Cette convergence est d'ordre au moins 2 : $\exists C > 0\ \forall n \geq 0\ |x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$

• Si en plus $f''(a) > 0$, pour $x_0 \in]a, a+\alpha[$ $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

Ex 32 = Soit $y > 0$. On veut estimer $\sqrt{y} = a$.

Soient $0 < c < d$ tq $c^2 < y < d^2$, pour $x_0 \in]a, d]$, soit $(x_n)_n$ la suite obtenue en itérant $\varphi(x) = x - \frac{x^2 - y}{2x}$. Alors $0 < x_n - a < 2a\left(\frac{x_0 - a}{2a}\right)^{2^n}$

2- Pour les séries. Gourdon

G p202

Prop 33 = Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites à termes positifs tq $u_n \sim v_n$

• si $\sum u_n$ cv alors $\sum v_n$ cv et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$ ↳ C.ex p217 Rombaldi

• si $\sum u_n$ DV alors $\sum v_n$ DV et $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$

• Si maintenant $u_n = o(v_n)$ | Si $u_n = O(v_n)$

P p124

• si $\sum v_n$ DV alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ | $\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$

• si $\sum v_n$ cv alors $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$ | $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$

G p202-203

App 34 = Série Harmonique.

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ alors $H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$

où γ est la constante d'Euler.

Prop 35 - Comparaison série intégrale.

P p156-157

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et décroissante. Alors $\sum_{k=0}^{n} f(k) \geq \int_0^{n+1} f(t)\,dt \geq \sum_{k=1}^{n+1} f(k)$

G p159

3- Pour les intégrales à paramètres.

Prop 36 : Soient $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$. E un $\mathbb{R}$-evn de Banach, $f : [a,b[\to E$, $g : [a,b[\to \mathbb{R}^{+*}$ continues par morceaux sur $[a,b[$.

- Si $\int_a^b g$ diverge alors
  - si $f = \underset{b^-}{O}(g)$ alors $\int_a^x f = \underset{x \to b^-}{O}\left(\int_a^x g\right)$
  - si $f = \underset{b^-}{o}(g)$ alors $\int_a^x f = \underset{x \to b^-}{o}\left(\int_a^x g\right)$
  - si $f \underset{b^-}{\sim} g$ alors $\int_a^x f \underset{x \to b^-}{\sim} \int_a^x g$.
- Si $\int_a^b g$ converge alors
  - si $f = \underset{b^-}{O}(g)$, alors $\int_x^b f = \underset{x \to b^-}{O}\left(\int_x^b g\right)$
  - si $f = \underset{b^-}{o}(g)$ alors $\int_x^b f = \underset{x \to b^-}{o}\left(\int_x^b g\right)$
  - si $f \underset{b^-}{\sim} g$ alors $\int_x^b f \underset{x \to b^-}{\sim} \int_x^b g$.

Ex 37 : pour tout $\alpha > 0$ $\frac{1}{x} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)$ donc $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$
$= o\left(\int_1^x t^{\alpha-1} dt\right) = o(x^\alpha)$. + ex 86 p 169.

P p126

Ex 38 : $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt$

Rouvière p339

Thm 39 : Méthode de Laplace DVLPT

Soient $a < b \leq \infty$, $\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ C^2, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue en a, $f(a) \neq 0$ et $e^{-t_0 \varphi} f \in L^1([a,b[)$ pour un $t_0 \in \mathbb{R}$, si $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, alors

- $\forall t \geq t_0$ $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx$ est convergente.
- $F(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{e^{-x\varphi(a)}}{x \varphi'(a)} f(a)$, si $\varphi'(a) > 0$
- si $\varphi(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, alors $F(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-x\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{x}}$

App 40 : $\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^t dx \underset{+\infty}{\sim} t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}$

App 41 : Formule de Stirling :
$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

Rombaldi p219 220.

App 27 bis : Étude locale de la position d'une courbe par aux tangentes

Si f a un $DL_n(a)$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$, la tangente au graphe de f en a a pour équation $y = a_0 + a_1(x-a)$.
Si les a_k ne sont pas tous nuls pour $k \in [\![2,n]\!]$,
$p = \min\{k \in [\![2,n]\!], a_k \neq 0\}$, on a
$g(x) = f(x) - a_0 - a_1(x-a) = (a_p + \varepsilon(x))(x-a)^p$ avec $\varepsilon \underset{a}{\to} 0$

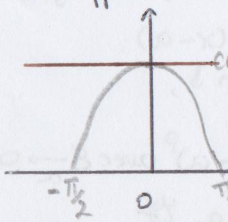
Pour x voisin de a, $a_p + \varepsilon(x)$ est du signe de a_p. Et

- si $p \equiv 0[2]$, $a_p > 0$ alors $g(x) > 0$ pour x au voisinage de a et différent de a : la courbe est localement au dessus de sa tangente
- si $p \equiv 0[2]$; $a_p < 0$ alors $g(x) < 0$ pour x au voisinage de a et $x \neq a$: la courbe est localement au dessous de sa tangente
- si $p \equiv 1[2]$, alors g change de signe au voisinage de a, ne s'annule qu'en a dans ce voisinage et la courbe traverse la tangente au voisinage de a. On dit que a est un point d'inflexion.

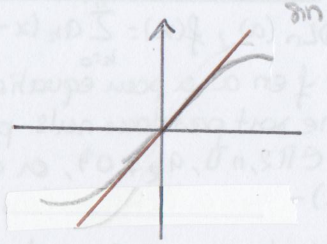
Bonus : position de la courbe par aux asymptotes.

Annexes:

Pour App24 bis:



$p=0[2]$ $a_p<0$.



$p=1[2]$

Prop35: