223

Suites numeriques - Convergence, valeurs d'adherence - Ex et Appli.

Dans la suite, (u_n) designe une suite numerique, i.e à valeurs ds $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de $|\cdot|$.

I. Suites numeriques et convergence.

1- Convergence dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ - A p 12-13

Def 1 : On dit que (u_n) est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leq M$.

Def 2 : Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) admet une limite ℓ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \geq 0$ $\forall n \geq N$ $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Rq 3 : Une suite qui ne converge pas, diverge.

Ex 4 : $(1/n)$ converge vers 0.

Prop 5 (Unicité de la limite) : Si (u_n) admet une limite alors elle est uniq.

Thm 6 : L'ensemble X des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergentes est une sous $\mathbb{K}$-algèbre des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et l'application limite est un morphisme de $\mathbb{K}$ algèbres de X dans $\mathbb{K}$.

Prop 7 : (Caracterisation sequentielle de la continuité). Soit $\ell \in \mathbb{C}$. Une fonction $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est continue au point ℓ ssi pr tte suite (u_n) convergent vers ℓ, $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Ex 8 : $(\cos(1/n))$ converge vers $\cos(0) = 1$. + app : Galton Watson

Prop 9 : Soient (x_n), (y_n) deux suites réelles, ℓ_1, ℓ_2 deux réels. Posons pr $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_n = x_n + i y_n$. Alors
$$\lim z_n = \ell_1 + i \ell_2 \iff \begin{cases} \lim x_n = \ell_1 \\ \lim y_n = \ell_2 \end{cases}$$

A p 20

Prop 10 : Toute suite convergente est bornée

Ex 11 :
- $(\exp(1/n))$ converge vers 1 et est bornée par e.
- mais $((-1)^n)$ est bornée par 1 et diverge.

2- Convergence dans $\mathbb{R}$ et ordre (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) p 12 A

Def 12 : On dit que (u_n) est majorée (resp minorée) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq A$ (resp $u_n \geq A$).

Def 13 : On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp $-\infty$) si $\forall A \in \mathbb{R}$ $\exists N \geq 0$ $\forall n \geq N$ $u_n \geq A$ (resp $u_n \leq A$)

Ex 14 : $(n!)$ diverge vers $+\infty$.

A p 32

Thm 15 :
- Si (u_n) est croissante majorée alors elle a une limite finie et $\lim u_n = \sup u_n$
- Si (u_n) est décroissante minorée alors elle a une limite finie et $\lim u_n = \inf u_n$.

Rq 16 : Si (u_n) est croissante non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

Ex 17 : $(1 + 1/n)$ est decroissante minorée par 1. Elle converge vers 1.

Thm 18 (des encadrements) : Soient (u_n), (v_n), (w_n) tq à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent et ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors v_n converge et a pour limite ℓ.

Ex 19 : $\forall n \geq 1$ $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$ d'où $\left(\frac{\cos n}{n}\right)$ cv vers 0.

A p 19

Def 20 : Les suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si (u_n) est croissante, (v_n) decroissante et $\lim (u_n - v_n) = 0$.

Thm 21 : Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et ont la même limite, notée ℓ. De plus, pr $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq \ell \leq v_n$.

Ex 22 : $\left(u_n = 1 - 1/n\right)$ et $\left(v_n = 1 + 1/n\right)$ sont adjacentes et convergent vers 1.

A p 33

3- Suites de Cauchy. A p 34-35

Def 23 : On dit que (u_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \geq 0$ $\forall n \geq N$ $\forall m \geq N$ $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$.

Prop 24 :
- Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.

Ex 25 : $(\sin(1/n))$ est convergente donc de Cauchy, bornée par 1.

Thm 26 : Dans $\mathbb{K}$, toute suite de Cauchy est convergente.

Rq 27 : Ce thm se traduit par le fait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets.

Ex 28 : $\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k\right)_{n \geq 1}$ n'est pas convergente car n'est pas de Cauchy.

4- Lemme de Cesaro et comparaison de suites A p 53 ex

a- Lemme de Cesaro

Thm 29 (Cesaro) Soit (u_n) convergente de limite $\ell \in \mathbb{C}$. Alors $\left(\frac{u_1 + \dots + u_n}{n}\right)$ converge et a pour limite ℓ.

Ex 30 : $(u_n = 1/n)$ a pr moyenne de Cesaro $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$ qui cv vers 0

Rq 31 : La réciproque est fausse : $((-1)^n)$ diverge mais
$$v_n = \frac{(-1) + (+1) + \dots + (-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
d'où $\lim v_n = 0$.

b- Comparaison de suites A p 25-26.

Def 32 : On dit que (u_n) est dominée par une suite réelle positive (α_n) s'il existe $A \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$ tq pr $\forall n \geq N$ $|u_n| \leq A \alpha_n$. On note $u_n = O(\alpha_n)$.

× On dit que (u_n) est négligeable devant une suite réelle positive (α_n) si $\forall \varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N$ $|u_n|\leq \varepsilon\alpha_n$.
On note $u_n=o(\alpha_n)$

Ex 33 : × Si (u_n) est bornée, $u_n=O(1)$
× Si $u_n\to 0$, $u_n=o(1)$.

Def 34 : On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si (u_n-v_n) est négligeable devant $(|u_n|)$. On note $u_n\sim v_n$.

Prop 35 : Si $u_n\sim v_n$ et $\lim u_n=\ell$ alors (v_n) converge et $\lim v_n=\ell$.

Rq 36 : Lemme de Cesaro : si $\lim u_n=\ell\neq 0$ alors $u_1+\dots+u_n\sim n\ell$.

Prop 37 (Formule de Stirling) : $n!\sim\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$.

II - Valeurs d'adhérence

1. Convergence et valeurs d'adhérence — A. p14-15

Def 38 : On appelle suite extraite de (u_n) toute suite $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est strictement croissante.

Ex 39 : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont extraites de (u_n).

Lemme 40 : On a $\forall n\in\mathbb{N}$ $\varphi(n)\geq n$.

Prop 41 : Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite.

Def 42 : On dit que $\ell\in\mathbb{C}$ est valeur d'adhérence de (u_n) si ℓ est limite d'une suite extraite convergente de (u_n).

Ex 43 : $((-1)^n)$ a 2 valeurs d'adhérence 1 et -1.

Prop 44 : Une suite qui possède au moins 2 valeurs d'adhérence, diverge.

Ex 45 : $((-1)^n)$ diverge.

Rq 46 : Une suite qui a une seule valeur d'adhérence ne converge pas forcément : $u_n=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ est pair}\\ n & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$ n'a que 1 comme valeur d'adhérence mais ne converge pas car (u_{2n+1}) diverge vers $+\infty$.

G

Prop 47 : Il y a équivalence entre :
* ℓ est valeur d'adhérence de (u_n)
* $\forall\varepsilon>0$ $\forall p\in\mathbb{N}$ $\exists n\geq p$ $|u_n-\ell|\leq\varepsilon$.
* $\forall p\in\mathbb{N}$ $\ell\in\overline{A_p}$ où $A_p=\{u_n\ n\geq p\}$.
* ℓ est point d'accumulation de $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$.

L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\overline{A_p}$. C'est un fermé.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:
Toute suite de Cauchy converge
doit admettre une (unique) v.a →

Prop 48 : ~~Une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence ℓ est convergente de limite ℓ.~~

Ap 36

Thm 49 (Bolzano-Weierstrass) Toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence.

Prop 50 : Une suite bornée qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence, converge.

Ex 51 : $u_n=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ est pair}\\ 1+\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$ est bornée par 2, a pour seule valeur d'adhérence 1 et converge vers 1.

2. Limites supérieures et inférieures (ici $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) — A p93 ou Gavet p12

Def 52 : On appelle limite supérieure (resp inférieure) de (u_n) $L=\inf_{n\geq 0}(\sup_{k\geq n}u_k)$ (resp $\ell=\sup_{n\geq 0}(\inf_{k\geq n}u_k)$). On note $\limsup u_n$ (resp $\liminf u_n$). C'est à valeurs ds $\overline{\mathbb{R}}$.

Prop 53 : × La limite inférieure de (u_n) (resp supérieure) est la plus petite (resp grande) de ses valeurs d'adhérence, si celle-ci est finie.
× $\liminf u_n\leq\limsup u_n$
× (u_n) converge vers $u\in\mathbb{R}$ ssi $\liminf u_n=\limsup u_n=u$

Ex 54 : $((-1)^n)$ vérifie $\liminf u_n=-1$, $\limsup u_n=1$. App : Glivenko Cantelli

III - Suites classiques

1. Suites arithmétiques et géométriques — p. 3 A

a- Suites arithmétiques :

Def 55 : Soient $a,r\in\mathbb{K}$, (u_n) est une suite arithmétique de 1er terme a et de raison r si $\begin{cases}u_0=a\\ u_n=u_{n-1}+r, & n\geq 1\end{cases}$

Prop 56 : Ds ce cas, $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n=a+nr$.

b- Suites géométriques.

Def 57 : Soient $a,q\in\mathbb{K}$, (u_n) est une suite géométrique de 1er terme a et de raison q si $\begin{cases}u_0=a\\ u_n=qu_{n-1}, & n\geq 1\end{cases}$.

Prop 58 : Dans ce cas, $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n=ar^n$.
De plus, × Si $|q|<1$, $\lim u_n=0$
× Si $|q|>1$, (u_n) diverge
× Si $q=1$, (u_n) est constante égale à 1
× Si $|q|=1$, $q\neq 1$, (u_n) diverge.

c- Suites arithmético-géométriques. — p6. A

Def 59 : Soient $a,r,q\in\mathbb{K}$, (u_n) est dite arithmético-géométrique si $\begin{cases}u_0=a\\ u_n=qu_{n-1}+r, & n\geq 1\end{cases}$.

Rq 60 : On peut trouver une écriture de (u_n) en fonction de n et la convergence ou divergence s'en suit.

A p38

2- Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Def 61 : Une suite récurrente (u_n) est définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et de $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$, où $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Elle est bien définie si $f(I) \subset I$.

Prop 62 : Soit (u_n) une suite récurrente.
- Si f est croissante sur I, alors (u_n) est monotone.
- Si f est décroissante sur I, les suites extraites paires et impaires sont monotones de sens de variation opposés.

Ex 63 : (u_n) définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $u_0 \in I$. Elle est croissante si $u_0 \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ et décroissante si $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Prop 64 : Si (u_n) converge vers $\ell \in I$ alors $\ell = f(\ell)$.

Rq 65 : C'est un corollaire de la caractérisation séquentielle de la continuité.

Ex 66 : Si $u_0 = 1$ et $f : x \mapsto x^2 - x - 3$, les seules limites possibles de (u_n) sont -1 ou 3.

(*) **Thm 67** : Méthode de Newton) : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, s'annulant en un unique point a tel que $c < a < d$ et vérifiant $f'(x) \neq 0$ pour $x \in [c,d]$.
On définit $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par
$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{pour } x \in [c,d].$$
Alors
1) Il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par φ et tel que la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = \varphi(u_n), n \geq 0 \end{cases}$ converge vers a à l'ordre au moins 2 : $\exists C > 0$ $\forall n \geq 0$ $|u_{n+1} - a| \leq C |u_n - a|^2$.
2) Si en plus $f''(a) > 0$ alors la convergence est d'ordre 2 exactement avec $u_0 \in]a, a+\alpha]$:
$$u_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)} (u_n - a)^2.$$

(voir dessins en annexes)

Thm 68 : (Point fixe de Picard). Si f est k-contractante de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, alors il existe un unique $a \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = a$. De plus, pour tout $u_0 \in \mathbb{K}$, (u_n) converge vers a de façon géométrique :
$$\text{pr } \forall n \geq 1 \quad |u_n - a| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$$

Rq 69 : Ce thm est vrai pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il est vrai en général sur tout espace métrique complet.

3- Suites équiréparties.

Def 70 : Soit (u_n) une suite de $[0,1]$. Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose $S_n(a,b) = \mathrm{Card}\{k \in [\![1,n]\!], u_k \in [a,b]\}$, $n \geq 1$.
On dit que (u_n) est équirépartie si pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$ $\lim \frac{S_n(a,b)}{n} = b - a$.

Thm 71 (Critère de Weyl) (*)
Soit (u_n) une suite de $[0,1]$. On a équivalence entre :
- (u_n) est équirépartie
- Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue avec $f(0) = f(1)$
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$$
- $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp(2i\pi p u_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Rq 72 : Ce thm est encore vrai si f ne vérifie pas $f(0) = f(1)$.

Ex 73 : $(\{n\theta\})$ est équirépartie ssi θ est irrationnel, où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x.

Références : - Amrani, Suites et séries A
- Gourdon, Analyse G

DVLPTS [- Rouvière : Newton
- Oraux X-ENS Analyse 2 : Weyl

Remplacer 3. par lien entre suites et séries

Annexes :

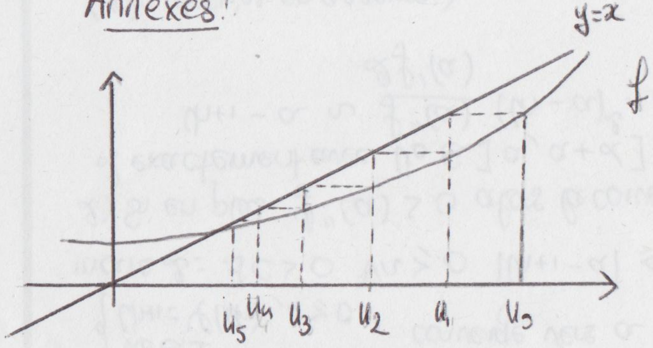

Fig 1 : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante

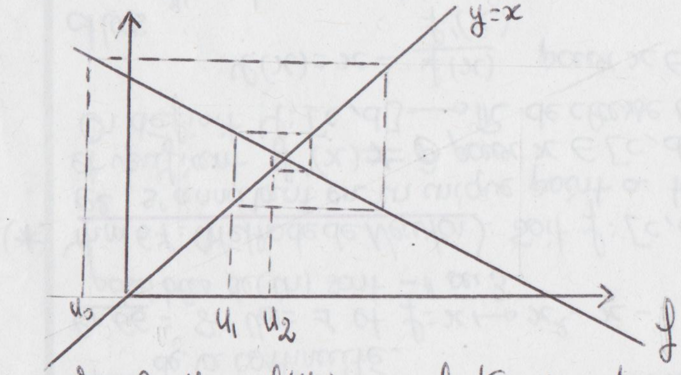

Fig 2 : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante

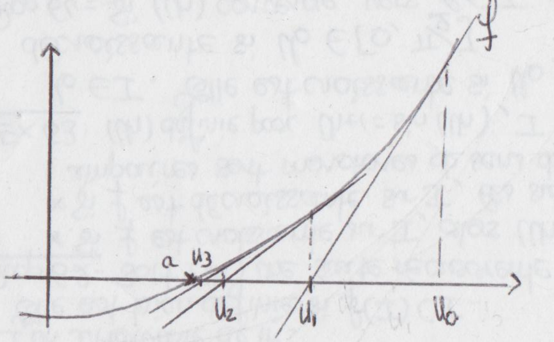

Fig 3 : Méthode de Newton

× à quoi servent les suites équiréparties ?
× modéliser à l'ordi une suite équirépartie
× Réciproques partielles de Cesaro.
× équirépartie ⇒ densité. Réciproque fausse

Si $u_n \sim \mathcal{U}([0,1])$ ⇒ du critère de Weyl
ressemble à Monte Carlo