Leçon 220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

Développements :

Equation de Hill Mathieu, Cauchy Lipschitz

Bibliographie :

Berthelin, Demailly, Lesfari

Notes

Plan essentiellement repris de celui présenté par Marie Derrien.

Intro

La considération des équations différentielle intervient dès le XVIIe siècle avec la révolution cartésienne qui débouche avec Newton sur la mathématisation de la physique. L'aspect très physique de cette théorie n'a jamais cessé d'exister et les interprétations qualitatives du travail mathématique ont toujours éclairé l'étude purement théorique. Puis omniprésence moderne, avec l'évolution vers les EDP également.

Il faut donner vie à cette leçon, c'est déjà appelé par la mention du « qualitatif » dans l'étude, mais c'est surtout nécessaire pour remettre les équations différentielles dans leur cadre naturel. Les situations physiques et la modélisation doivent être présentes au moins dans la présentation et la défense du plan. Il ne s'agit pas de remplacer le traitement mathématique par des interprétations empiriques, mais de motiver les équations étudiées. L'aspect numérique peut apporter beaucoup.

Les EDO interviennent très souvent en modélisation : dynamique de populations, modèles financiers... Dans le Berthelin : Une équation différentielle décrit souvent l'évolution d'un système physique au cours du temps. Ainsi, la variable t est appelée variable de temps et la variable y la variable d'état puisqu'elle décrit les différents états du système. Les premières questions qui se posent sont :

-L'existence de solutions,

-Leur unicité éventuelle lorsque nous rajoutons des conditions initiales (ou des conditions aux limites)

-Leur ensemble de définition et leur comportement aux extrémités de cet ensemble

-Le calcul explicite, s'il est possible, de ces solutions.

Plan

1 Etude générale des équations différentielles

1.1 Premières définitions et problème de Cauchy

Remarque 1 (Berthelin p12). Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times K^N$ et $f : U \to K^N$ continue. On considère l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, $(t, y) \in U$.

Remarque 2 (Berth p21,Gourdon p254). On peut aussi définir un système d'équas diff d'ordre supérieur mais on peut se ramener à un système d'ordre 1 par des matrices.

Définition 3 (Berth p12)**.** Solution de (E).

Définition 4 (Berth p12)**.** Problème de Cauchy.

Définition 5 (Berth p12)**.** Linéaire ou non.

Exemple 6. Equation du type RLC.

Proposition 7 (Berth p13)**.** *Régularité des solutions. Si f est C^k alors toute solution est C^{k+1}.*

Proposition 8 (Berth p13)**.** *Formulation intégrale du problème de Cauchy.*

1.2 Existence et unicité des solutions

Définition 9 (Berth p15)**.** Prolongement.

Définition 10 (Berth p16, Demailly p128)**.** Solution maximale.

Proposition 11 (Demailly p128)**.** *Toute solution se prolonge en une solution maximale.*

Exemple 12 (Demailly p130)**.** $y' = y^2$.

Définition 13 (Berth p82)**.** Fonction localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état.

Proposition 14 (Berth p83)**.** *C^1 implique localement lipschitzien.*

Théorème 15 (Berth p83)**.** *Théorème de Cauchy-Lischitz.*

Exemple 16 (Berth p95,p120)**.** $y' = t^2 e^y$, $y'' + (y')^2 \sin(ty) = 0$: existence et unicité des solutions maximales.

$y' = y^2/t$, $y(1) = 1$, $y' = y^2$, $y(0) = -1/2$: existence et unicité des solutions maximales, donner la solution et son intervalle de définition.

$x' = |y - t|, y' = |x - t|$.

Remarque 17 (Demailly p143). Le théorème d'unicité signifie géométriquement que des courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper.

Application 18. Si $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ alors les solutions sont bornées.

Exemple 19. Les solutions de $x' = x(1-x)$ sont bornées par 0 et 1.

Proposition 20. *Parler de solutions périodiques.*

Remarque[Berth p83] Sans l'hypothèse localement lipschitzien par rapport à la variable d'état, on n'est plus assuré de l'unicité mais on garde tout de même l'existence de solutions.

Théorème 21 (Berth p83)**.** *Théorème de Cauchy-Peano-Arzela local.*

Exemple 22 (Berth p120,525,Demailly p138)**.** $y' = \sqrt{y}$: les solutions maximales sont la fonction nulle et les y_C.

$y' = 3|y|^{2/3}, y(0) = 0$ admet au moins deux solutions maximales : la fonction nulle et t^3.

1.3 Le problème de la globalité

Définition 23 (Berth p16)**.** Solution globale.

Proposition 24 (Berth p16)**.** *Globale implique maximale. Réciproque fausse en général.*

Contre-exemple 25 (Berth p16)**.** $f(t,y) = y^2$, $y(0) = y_0 > 0$: $y(t) = y_0/(1-y_0t)$ solution maximale non globale.

Définition 26 (Berth p84)**.** Globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état.

Théorème 27 (Berth p90)**.** *Théorème de Cauchy-Lispchitz dans le cas globalement lipschitzien.*

Corollaire 28 (Berth p90)**.** *Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.*

1.4 Durée de vie d'une solution

Proposition 29 (Berth p18,23)**.** *Lemme de Gronwall intégral.*

Application 30 (Berth p23)**.** Si $y > 0$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = \phi(y)$ tel que $|\phi(x)| \leq C|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $y(t) \leq y(0)exp(tC)$.

Application 31 (Rouvière p133)**.** $||y_1(t) - y_2(t)|| \leq ||x_1 - x_2||exp(k|t-t_0|)$.

Remarque 32. Pour $x_1 = x_2$, on retrouve le résultat d'unicité dans Cauchy-Lipschitz global.

Application 33. Pour $y"+qy = 0$, si q est C^1, croissante, strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, alors les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 34 (Berth p107)**.** *Théorème de sortie de tout compact.*

Corollaire 35 (Berth p109)**.** *Théorème des bouts.*

Proposition 36 (Berth p109)**.** *Si f est bornée, les solutions sont globales.*

Exemple 37 (Berth p110 p578,231)**.** $y' = sin(y)$.

$x' = y + x(1-x^2-y^2), y' = -x + y(1-x^2-y^2)$. Si $x_0^2 + y_0^2 \in]0,1[$ alors les solutions sont globales.

1.5 Pour la cas linéaire : wronskien

Définition 38 (Berth p40)**.** Wronskien.

Proposition 39 (Berth p40)**.** *Les solutions sont indépendantes ssi le wronskien est non nul en un point.*

Exemple 40 (Berth p78)**.** Si q est intégrable alors les solutions maximales de $y'' + q(t)y = 0$ sont définies sur $\mathbb{R}_+$ et il existe des solutions non bornées.

Proposition 41. *Formule du wronskien*

Application 42. Equation de Hill Mathieu

2 Expression explicite des solutions

2.1 Cas des équations différentielles linéaires

Proposition 43 (Berth p34)**.** *L'ensemble des solutions homogènes est de dimension N.*

Corollaire 44 (Berth p35)**.** *L'ensemble des solutions est un espace affine de direction l'ensemble des solutions homogènes.*

Proposition 45 (Berth p36)**.** *Solution globale de $y' = a(t)y + b(t)$.*

Proposition 46 (Berth p54)**.** *Formule de Duhamel dans le cas A constant.*

Exemple 47.

2.2 Cas d'équations types

Proposition 48 (Berth p129)**.** *Méthodes pour variables séparables.*

Exemple 49 (Berth p129)**.** $t\ln(t)y' - y - 1 = 0$, pour $t > 0$.

Proposition 50 (Berth p136)**.** *Méthode pour équation de Bernoulli.*

Exemple 51.

Proposition 52 (Berth p137)**.** *Méthode pour équation de Ricatti.*

3 Etude de la stabilité

3.1 Points d'équilibre d'un système autonome

Définition 53 (Bert ou Dem)**.** Système autonome.

Définition 54 (Bert ou Dem)**.** Point d'équilibre.

Définition 55 (Berth p234)**.** Stabilité. Stabilité asymptotique. (Dessin)[Demailly p282]

Exemple 56 (Berth p236)**.** $y' = y$,$y' = -y$.

3.2 Cas linéaire

Théorème 57 (Berth p239,Demailly p285)**.** *Cas homogène à coefficients constants,* 0 *est point d'équilibre et discuter la stabilité.*

Remarque 58 (Berthelin p205,Demailly p291)*.* Faire les dessins des noeuds en dimension 2. (Allure des trajectoires).

Exemple 59. $x" + x = 0$.
$x' = 4x - y, y' = x + 2y$.

3.3 Cas général

Proposition 60 (Berth p247,Rouvière p141)**.** *Stabilité par linéarisation.*

Exemple 61 (Berth p260)**.** Exemple d'un système 2×2.

Contre-exemple 62 (Demailly p289)**.** On ne peut pas décider de la nature du point critique si la matrice jacobienne a une valeur propre de partie réelle nulle.
$x' = \alpha x^3, y' = \beta y^3$.

Exemple 63 (FGN p189)**.** 0 est asymptotiquement stable pour l'équation de Van der Pool.

Exemple 64 (Berth p260,583)**.** Stabilité asymptotique du pendule sans frottement.

4 Pendule simple

à parsemer

Remarque 65 (Berth p259,400,FGN p285)*.* L'équation, l'intégrale première, le portrait de phase.