219

Extrémums : existence, caractérisation, recherche - Exemples et applications

E un $\mathbb{R}$-evn de dim $<\infty$ - $\mathcal{C}$ partie de E. $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{C}$

I. EXISTENCE ET UNICITÉ

1. Compacité (Pommelet + (G))

P 56 **Thm 1** : Si f est continue sur un compact de E alors f est bornée et atteint ses bornes.

G 33 **App 2** : × distance entre 2 parties : Si K_1 et K_2 sont deux compacts de E, il existe $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$ tq $\|x_1 - x_2\| = d(K_1, K_2) = \inf_{x \in K_1, y \in K_2} \|x - y\|$

P 68 × Si E est de dim $<\infty$, toutes les normes sur E sont équivalentes

P 295 **Prop 3** : Si E est de dim $<\infty$, f continue tq $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Alors f est minorée et atteint son minimum.

P 296 **App 4** : × La distance d'un point à une partie fermée non vide de E, avec dim $E < \infty$, est atteinte

× Polynômes de meilleure approximation : Soit $n \geq 1$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ conti; il existe $P \in E_n[X]$ tq $\|f - P\|_\infty = \inf_{Q \in E_n} \|f - Q\|_\infty$

× Théorème de d'Alembert Gauss : Tout polynôme complexe non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$.

2. Convexité. OA

OA 27 **Def 5** : Soit $\mathcal{C}$ un convexe de E, $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur $\mathcal{C}$ si : $\forall x, y \in \mathcal{C}^2$ $\forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
f est strictement convexe si l'inégalité est stricte pour $x \neq y$, $\lambda \in]0,1[$.

Prop 6 : Si f est convexe, $\{x \in \mathcal{C}, f(x) \leq \alpha\}$ est convexe

Thm 7 : Si f est strictement convexe sur $\mathcal{C}$, alors il existe au plus un point $x_0 \in \mathcal{C}$ minimisant f sur $\mathcal{C}$

FGN Al3 229 231 **Lemme 8** : Stricte concavité logarithmique du déterminant : Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ $\alpha + \beta = 1$. Alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$. Et si $A \neq B$, l'inégalité est stricte

Appli 9 : Ellipsoïde de John Loewner : Si K est un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal, contenant K.

DVLPT

3. Espaces de Hilbert. Li p27

HL **Thm 10** : Soit H un espace de Hilbert, $\mathcal{C}$ une partie non vide, convexe et fermée de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in \mathcal{C}$ tel que $\|x - y\| = d(x, \mathcal{C})$. On le note $P_\mathcal{C}(x)$. C'est la projection de x sur $\mathcal{C}$.
Il est caractérisé par : $y \in \mathcal{C}$ et $\forall z \in \mathcal{C}$ $\mathrm{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$.
De plus $P_\mathcal{C}$ est 1-lipschitzienne.
× Si F est un sev fermé de H, alors $P_F : H \to F$ est linéaire continue et $P_F(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

R ex 121 p375 **App 11** : × Moindres carrés : Étant donnés n points (x_i, y_i) du plan $\mathbb{R}^2$ avec les x_i non tous égaux, il existe des nombres λ et μ uniques qui rendent minimale $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$.

× Calcul du minimum d'une intégrale

(× Définition de l'espérance conditionnelle)

4. Fonctions holomorphes. OA p72 OA + (Rouv)

Def 12 : Soit f une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On dit que f possède la propriété de la valeur moyenne si pour tout $D(a, r)$ tq $\overline{D}(a, r) \subset U$, on a $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt$.

Prop 13 : Une fonction holomorphe sur U vérifie la propriété de la valeur moyenne

Thm 14 : Principe du maximum local. Soit f vérifiant la propriété de la valeur moyenne sur U. Si $|f|$ admet un maximum local en $a \in U$, alors f est constante dans un voisinage de a.

Thm 15 : Principe du maximum global. Soit U un ouvert connexe et borné de $\mathbb{C}$. Soit f continue sur $\overline{U}$, vérifiant la propriété de la valeur moyenne. Notons M le maximum de $|f|$ sur la frontière de U. Alors
× pour tout $z \in U$ $|f(z)| \leq M$
× s'il existe $z_0 \in U$ tq $|f(z_0)| = M$ alors f est constante sur U.

Rq 16 : La propriété de la valeur moyenne n'empêche pas l'existence de minima locaux. $f : z \mapsto z$ sur $D(0,1)$, $|f|$ atteint son mini en $z = 0$.

OA p8 **App 17** : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant $\overline{D}(0,1)$, si f est holomorphe sur U tq $f(0) = 1$ et $|f(z)| \geq 2$ sur $|z| = 1$ alors f s'annule sur $D(0,1)$

R ex1 p37 **Prop 18** : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur U. Si $|f|$ admet un minimum local sur U, alors ce minimum est nul

II LOCALISATION ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

1. Conditions du 1er ordre OA, G, Rouv

OA 1 **Thm 19** (Condition nécessaire) : Si $\mathcal{C}$ est un ouvert de E et $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$. Si a est un extremum local de f et si f est différentiable en a. Alors $df(a) = 0$.

C-ex 20 : • condition seulement nécessaire : $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$
• faux si $\mathcal{C}$ n'est pas ouvert : $t \in [0,1] \to t$.

G 71 **Thm 21** (de Rolle) : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ tq $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$

G78 **Thm 22 (de Darboux)** : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires i.e $f'(I)$ est un intervalle

Thm 23 : Soit f différentiable sur U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors f est
R ex119 p371 convexe ssi $\forall (x,y) \in U^2$ $f(y) - f(x) \geq df(x).(y-x)$.

App 24 : Si f est différentiable et convexe sur U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ tq $df(a) = 0$. Alors a est un minimum global de f.

Cadre vial **App 25** : estimateur de maximum de vraisemblance ?

2. Conditions du second ordre

P298 ou OA18 ou G216 **Thm 26** : Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de E.

- Si f admet un minimum local en $a \in U$ alors a est un point critique de f et $d^2f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique positive
- Si a est un point critique de f et si $d^2f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, alors a est un minimum local strict de f.

Rouv p371 **C-ex 27** : pour 1) : $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^3$ en $(0,0)$.
2 : $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^4$ en $(0,0)$.

P299 **Corollaire 28** : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$ $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ (notations de Monge).
Alors

- si f admet un minimum local en a alors $p = q = 0$ et $r \geq 0$, $s \geq 0$ et $rt - s^2 \geq 0$.
- si $p = q = 0$ et $r > 0$ et $rt - s^2 > 0$ alors a est un minimum local. max

R ex119 p371 **Thm 29** : Soit U un ouvert convexe de E, $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Alors f est convexe sur U ssi d^2f est une forme quadratique définie positive en tout point i.e.
$d^2f(x)(h,h) \geq 0$ $\forall x \in U$ $\forall h \in E$.

Thm 30 : Si f est convexe deux fois différentiable sur un ouvert convexe U et si $df(a) = 0$. Alors f admet un minimum global en a.

3. Optimisation sous contraintes

OA

G317 ou OA 20 **Thm 31 (des extrema liés)**. Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \subset E \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, où U est un ouvert de E.
Posons $\mathcal{C} = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.
Si a est un extremum local de f dans $\mathcal{C}$ et si les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que $df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a)$.

DVLPT

App 32 : $SO_n(\mathbb{R})$ est exactement l'ensemble des matrices de $SL_n(\mathbb{R})$ qui minimisent la norme $\|M\| = \sqrt{Tr({}^tMM)}$. G9 p35

- Comment obtenir un parallélépipède rectangle d'aire minimale et de volume donné ? R ex 128 p396
- diagonalisation des endomorphismes symétriques : Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors il existe une b.o.n de E formée de vecteurs propres de u. OA p21
- (inégalité arithmético-géométrique.) G ex4 p319

III OPTIMISATION NUMÉRIQUE

Considérons un problème d'optimisation sans contraintes $\inf \{f(x), x \in \mathbb{R}^d\}$. Notons a un minimisant i.e une solution.
On va approcher a avec une suite (x_n) convergeant vers a.

1. Méthode de Newton. R p142 ex49

On se ramène ici à chercher a tel que $F(a) = 0$ où $F = f'$ i.e. c'est la recherche de points critiques de f.

Thm 33 : Soit $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $c < d$, $F(c) < 0 < F(d)$ et $F'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$.
On considère la suite récurrente $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$.
où $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors

- F a un unique zéro a
- il existe V un voisinage de a stable par φ tq x_n cv vers a. Cette convergence est d'ordre au moins 2.

+ dessin.

Appl 34 :

2- Méthode de descente - OA

On suppose ici que f est suffisamment régulière et admet un uniq minimum a.

* Définir un critère d'arrêt de l'algorithme :
  ex : $\|\nabla f(x_N)\|$ plus petit qu'un seuil fixé. par thm 19.
* Choix de x_0 : important en pratique.
  ex : prendre une première estimation de la solution.
* Passage de x_n à x_{n+1} :
  - choisir une directᵒ de descente d_n
  - choisir un pas de descente t_n.

  $x_{n+1} = x_n + t_n d_n$.

→ Méthode du gradient : $d_n = -\nabla f(x_n)$. direction de la plus forte décroissance locale.
  * gradient à pas constant : $t_n = 1$
  * gradient à pas optimal : t_n tq $f(x_n + t_n d_n) = \min_{t \geq 0} f(x_n + t d_n)$
  * gradient conjugué : voir Ciarlet

App 35 : Optimisation quadratique.
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ définie positive, $b \in \mathbb{R}^d$.
$f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$.
Minimiser f sur $\mathbb{R}^d$ revient à résoudre $Ax = -b$.

Plan essentiellement repris de William DALLAPORTA et Nicolas SCHAEFFER

Réf : OA : objectif agrégation
G : Gourdon Analyse
R : Rouvière petit guide de calcul diff
P : Pommellet Agrégation de maths, cours d'analyse
FGN Al 3 : Oraux X-ENS Analyse 3 ← DVLPT
Li : Analyse fonctionnelle