245 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$
Exemples et applications

JSK – ROUV – Gourdon

I – Différentiabilité :

1. DEFINITIONS — JSR 2) p 173

DEF 1 : f différentiable en a.
reformulat° avec ε et δ) 2.1
DEF 2 : différentielle de f en a. 2.6
DEF 3 : différentiable sur un ouvert 2.9
DEF 4 : applicat° C^1 2.9
Prop : unicité de la différentielle 2.5
Prop : diff ⟹ c 2.4
+ lien avec dérivabilité –

EXEMPLES
· affine, cste, quadratiqe. ROUV ou Nanco p 680 + diff du déterminant
· $f : Inv(\mathbb{R}^n) \longrightarrow Inv(\mathbb{R}^n)$, $x \longmapsto x^{-1}$ est C^1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ + dét ou $\|\cdot\|$ norme algébr

~~DEF : Gradient~~

2. OPERATIONS — JSR 3) p 176

Thm somme fct diff
Thm pdt fct diff
Thm TFC
mq : ces opérations conservent le caractère C^1 des applications 4) p178
→ appli au wronskien
+ app au wronskien

3 – TAF 5) JSR p 179

Thm TAF
cor : si $\|df(x)\| \leq M$ alors f – M-lipschtzienne
cor si df = 0 sur Ω ouv connexe ssi f = cste sur Ω

4 – LIMITES DE FCT DIFF. JSR 6) p 183

Thm $(f_n)_n$ suite fct diff sur Ω ouv de $\mathbb{R}^n$.
· $(f_n)_n$ cvge vers f
· (f_n') CVU vers $\varphi : \Omega \to \mathcal{L}(E,F)$ thm 6.1
Alors f diff et $f' = \varphi$.

cor : pour applicat° de classe C^1. cor 6.2
mq Adaptation pr les series de fct
Appli : exp est de classe C^1. exo 38 ROUV p 407

5. DIFFERENTIELLE PARTIELLE — GOU p 301

DEF : Dérivée selon un vecteur.
PROP : Diff en a ⟹ admet une d selon tout vect en a.
cex $\begin{cases} f(x,y) = \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0,y) = y \end{cases}$ d suivant ∀ vect en (0,0) ms pas c en (0,0).

DEF : Dérivée partielle JSR 4.4) p 191 ou Nanco
PROP f diff en a alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe $\forall\, 1 \leq i \leq n$ thm 4.4
et $df(a).h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$ où $h = (h_1 \dots h_n)$ ou Nanco
Thm : si toutes d partielles existent et sont c alors f est C^1 en a et $df(a).h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$ thm 4.4 JSR p 180
mq : réciproque fausse
$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ diff en 0 ms f' ∄ c en 0 Gourd p 3.. ou Nanco ~~ou~~ JSR p 189
mq : C^1 ⟺ dérivées partielles existent et sont c
DEF Matrice Jacobienne 12.1 p 193 JSK
Thm composée matrice jacobienne
DEF Jacobien, gradient

II – TIL – TFI — Rouvière

1 – TIL

Thm TIL Rouv p 188
cex ccl locale
cex C^1 nécessaire R ex 6.2.
Appli : exp est difféo local en 0.
Thm surj de exp.
Appli Hadmard – Levy p 179 ROUV / racine kème de matrice
dcOA

2. TFI

Thm TFI p180 ROUV

Cex $x^2+y^2-1=0$ paramétrage. EX1 p180

III - DIFF D'ORDRE SUPERIEUR

1. Définitions et propriétés

DEF : classe C^2

rmq $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F)) \simeq \mathcal{L}(E,E;F)$

DEF diff seconde

DEF classe C^n et diff. d'ordre n

Thm : somme, pdt, composée de fct de classe C^2

2. DERIVEES PARTIELLES SECONDES

Notat° $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ si $i=j$

JSR p202

Thm : f a des ∂ partielles 1ère et 2nd $\Leftrightarrow$ alors f est C^2

Prop : f est C^2

$df(a)(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j} x_i y_j$

Thm Schwarz

G p305 ex1

Cex $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent ms sont $\neq$.

JSR p203

DEF Matrice hessienne

rmq Schwarz hessienne est sym.

3. Taylor ROUV

Thm : Ineg Taylor

Thm : Taylor-Young. p280 Thm 6.2

Thm : TRI p280 ROUV. thm 6.3

Appli Morse

IV - Calcul diff et extremum

1. Condition du 1er ordre OA p11

Thm : f a un ext en a alors $df(a)=0$ ou JSR p 239

reciproque vrai si f convexe JSR p240

Cex $x \mapsto x^3$ (cas general)

2. Condit° second ordre Rom p298 ou JSR p245

Thm : f a un min local en a $\Rightarrow$ $d^2f(a)$ forme bilin sym positive

· si $df(a)=0$ et $d^2f(a)$ def positive alors a est un min local strict.

3 - optimisat° s/s contrainte

OA

Thm extrema-liés

Appli

· ineg arith-geom

· diago endo sym ...