L1, FGN Al3 + Amrani

243 — Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

I- Généralités

soit H un ev sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définitions et premières propriétés [I p27]

DEF : pdt scalaire

DEF : EPH (esp. prehilbertien)

EX : * $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot))$ où $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

* $(L^2, (\cdot|\cdot))$ où $(f|g) = \int fg\,dm$

* $(\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}), (\cdot|\cdot))$ où $(x|y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$

PROP : $\forall x, y \in H$

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$ cas réel

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x|y)$ cas complexe

THM : CYS

COR : $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ norme

COR : $\forall y \in H$ $\Phi_y : \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto (x|y) \end{array}$ est lin et $\leq$.

Rmq : cas égalité ds CYS.

2. Orthogonalité [L1 p30]

DEF : Vecteurs orthogonaux

Thm (Pythagore)

(i) $x \perp y$ ssi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ cas réel

(ii) $x \perp y$ ssi $\begin{cases} \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{cases}$ cas complexe.

DEF : partie orthog.

PROP $A^\perp$ = plus gde partie orthog de A

$A^\perp$ fermé

3. Espaces de Hilbert [L1 p31]

DEF : Hilbert

EX $(L^2(m), (\cdot), \|\cdot\|)$; $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$; # eph de dim finie

II- Thm project° et ses conséquences

1. Thm projection [L1]

PROP : id du parallélogramme

THM PROJECTION [L1 p. 32, 33, 34]

H Hilbert C convexe et fermé de H

(i) $\forall x \in H$ $\exists! P_C(x) \in C$: $\|x - P_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x-y\|$

(ii) $P_C(x)$ carac par $P_C(x) \in C$ et $\langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0$.

(iii) P_C 1-lipschtz.

(iv) si C est un sev $P_F(x)$ unit pt y tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$

2. Conséquences [L1]

THM : TSO p36

cor $F^{\perp\perp} = \overline{F}$

a- critère de densité

THM : critère de densité

cor : $C_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^2, \|\cdot\|_2)$

~~cor : $C_c^0(\mathbb{R})$ dense ds $(L^2, \|\cdot\|_2)$~~

b- Thm représentat° de Riesz p38

THM Riesz

Appli : Existence de l'adjoint ds les Hilbert

THM : Lax-Milgram

Appli : résolution d'une équat°

DEV.

III - Bases hilbertiennes [L1 p40]

DEF : espace séparable

ex : ev de dim finie ; c_0 et $\ell_p(\mathbb{N},\mathbb{C})$ séparable. $1 \leq p < \infty$.

1- Famille orthonormée

DEF : famille orthonormée.

Ex $(e_n)_n$ ds $\ell^2(\mathbb{Z})$, $e_n : t \mapsto e^{2i\pi tn}$ $n \in \mathbb{Z}$ $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de L^2

PROP $(U_k)_k$ sont orth

$\|\sum_{k=1}^{n} a_k U_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$

COR : famille orthon est libre

CONSTRUCTION de b.o.n

Gram - Schmidt

ex : $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}} (x^3-ax^2-bx-c)^2 e^{-x} dx$ FGN AL3

PROP : Ineg de Bessel

PROP H eph $(u_n)_n$ suite ortho de H. Si $x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ alors $\varepsilon_n = (x|u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

PROP : $(u_n)_n$ ortho. $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ $F_n = \mathrm{Vect}(u_1, \dots u_n)$

$P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k$

PROP : H Hilbert. $(u_n)_n$ orthonormée. $\forall (\varepsilon_n)_n \in \ell^2$ $\sum \varepsilon_n u_n$ cvge ds H ie $S : H \to \ell^2$, $x \mapsto ((x|u_n))_n$ surj.

2. Bases hilbertiennes

DEF : famille totale

DEF : base hilbertienne

THM : H eph. $(u_n)_n$ base hilb.

- $\forall x \in H$ $x = \sum \varepsilon_n u_n$ où $\varepsilon_n = (x|u_n)$
- $\forall x, y \in H$ $\|x\|^2 = \sum_{n=0} |(x|u_n)|^2$

  $(x|y) = \sum_{n=0} (x|u_n)\overline{(y|u_n)}$

COR : H Hilbert et $(u_n)_n$ base hilbertienne

$S : H \to \ell^2$, $x \mapsto ((x|u_n))_n$ isomorphisme d'esp de Hilbert.

ex de bases hilbertiennes

(a) $(e_n)_n$ bh de L^2 où $e_n : t \mapsto e^{-2i\pi nt}$ $\boxed{\text{II}}$ DEV

(b) Polyn orthogonaux.

3 - Series de Fourier

Amrani

applicat° de ce qu'il y a au dessus, def des coeffs de Fourier, (e_n) BH, décomposit° de f + Parseval