209 Approximation d'une fct par des polynômes et polynômes trigonométriques. Exemples et appli.

I- Approximation de fct régulières

1. Approx point par point

a- Formule de Taylor GOU + Amrani L→DSE

soit $[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$.

THM : Taylor - Lagrange Thm 4 p73 GOU

THM : Formule Taylor reste - intégral Thm 5 p75 GOU

Taylor peut être vu comme une interpolation

$\to S_n f = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$ polynome d'interpo

$\to$ le reste donné par TL ou TRI est une est de l'erreur

Quand le reste est petit on a le cas particulier

DEF : DSE

Ex : exp

C-EX : $x \mapsto \exp(-1/x)$ si $x>0$, 0 si $x \leq 0$ pas DSE.

b- Interp de Lagrange DEM p21

Pcipe : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}$. Soient $x_0, \dots x_n$ $n+1$ pts $\neq$ ds $[a,b]$. Trouver P polyn : $P(x_i) = f(x_i)$ $\forall i$

DEF : polynôme de Lagrange l_i

THM : Existence + unicité pb d'interpolation p_n

$\Rightarrow p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$

Thm Formule erreur. DEM p23

f $n+1$ fois d sur $[a,b]$. $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi_x \in]\min(x_i,x), \max(x_i,x)[$

$f(x) - p_n(x) = \frac{\Pi_{n+1} f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

cor : erreur norme uniforme DEM p24

$\|f - p_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\Pi_{n+1}\| . \| f^{(n+1)} \|$

+ cas de convergence dem p32

Pb : phenomène de Runge DEM p36 à p39

polyn interp ne forment pas une suite cvgte

$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}$ $x \in]-1,1[$. $\alpha > 0$.

Cet ex mq pour f régulière, il ne faut $\not\!\!p$ s'attendre à ce que les poly d'interp. P_n aux pts équidistants cvge vers f sur l'int. d'interpolation

2- Approx compact

on travaille sur $(\mathcal{C}^0[a,b], \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ dans le 2) :

a- Thm de densité LI

Thm Weierstrass LI p51 || DEV

DEF : partie separante LI p46

Thm Stone - Weierstrass reel. (Admis). LI p46

Thm Stone Weierstrass complexe

Appli : SW complexe.

DEF : polyn trigo LI p53.

Thm : Les polyn trigo sont denses ds l'ens des fct $\mathcal{C}$ 1-périodique pour $\|\cdot\|_\infty$. LI p54

Appli : Critère de Weyl.

b- Polyn meilleur approximation uniforme DEM

on travaille avec $d(f, \mathcal{P}_n) = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_\infty$.

~~DEF : DEM p40~~

~~Fonction equioscille~~

THM-DEF : existence + (unicité) de poly de meilleur approximation uniforme DEM p40

admise

CARACTERISATION DEM p42

~~Pour $f \in \mathcal{C}([a,b])$, le poly de meilleur approx uniforme q_n de $\mathcal{P}_n$ est l'unique polyn de degré $\leq n$ tq $f - q_n$ équioscille sur au moins $(n+2)$ pts de $[a,b]$~~

q_n difficile à déterminer

LIEN avec interp de Lagrange DEM p46-47

operateur $L_n : \mathcal{C}([a,b]) \to P_n$, $f \longmapsto p_n$. operateur interp de Lagrange.

THM-DEF : Norme de L_n = cste de Lebesgue Λ_n (dsIb)

THM : $\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ $\|f - L_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \, d(f, \mathcal{P}_n)$.

Gourdon, ~~Amrani~~, Demailly, L$^{\circ}_{\text{III}}$ OA

II - Approximation en moyenne quadratique DEM

1. Polyn orthogonaux ~~DEM p 51~~ OA p111.

Soit $]a,b[$ int ouvert borné ou non dans $\mathbb{R}$.

DEF : poids sur $]a,b[$

on considère ω un poids.

Soit $(\mathcal{C}^0(]a,b[), <,>, \|\cdot\|_2)$ où $<,>$ pdt scalaire
$\|\cdot\|_2$ norme associée.
= norme quadratique.

Thm 1 DEM p51 — THM : Existence + unicité polynômes orthogonaux $(p_n)_n$
$\forall n$ deg $p_n = n$ et unitaires. + densité.

Thm 2 p52 — THM : relat° récurrence polynômes orthogonaux

ex : polyn orthogonaux
Tchebychev, Laguerre, Hermite, Legendre.

Thm 3 — THM : Pour tout poids ω, le polyn p_n possède n zéros $\neq$. DEM

2 - Meilleur approx quadratique DEM ou un peu OA p111

Thm 4 p53 — THM - DEF polynome de meilleur approx quadratique
(existence + unicité).

Thm 5 p54 — THM : Si $]a,b[$ borné alors $f \in C^0(]a,b[)$ et r_n polyn de meilleur approx quadratique alors $\|r_n - f\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

p55 — Mise en oeuvre numérique

Utilisation méthode intégrat° numérique.

III - Approx fct périodique

1 - Thm de Dirichlet GOU p260 (ou OA p130)

Thm 2 p260 — Thm : Jordan-Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π périodique cpm sur $\mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$
$h \mapsto f(t_0+h) + f(t_0-h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)$ bornée au voisinage de 0. Alors $\sum^n c_n(f) e^{int_0}$ cvge et
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int_0} = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$.

Cor : thm de Dirichlet

rmq : C^0 ne suffit pas. Cex exo 4 p. 264.

2. Thm Fejer OA p128

Thm Fejer thm 3.75 p128]

Appl : densité poly trigo ds l'ens fct c pour $\|\cdot\|_\infty$. 3.76 p128
$(e_n)_n$ base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. 3.78 p128

Appl : retrouve Stone-Weierstrass

3. CVN de la série de Fourier ~~GOU~~ OA p130

Thm : CVN p261 GOU ~~thm 3~~ ou Amrani

~~4. Applicat°~~

~~EQ de la chaleur.~~