208 — Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues - Ex.

Li

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. ESPACES VECTORIELS NORMÉS ET APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES.

1. Norme et espaces vectoriels normés.

Def 1: Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que
- $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall x \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall x, y \in E$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Rq 2: À partir d'une norme on obtient une distance sur E avec pour tout $x, y \in E$ $d(x,y) = \|x - y\|$.

Ex 3: . $|\cdot|$ sur $\mathbb{K}$.
- sur $\mathbb{K}^n$, $\|\cdot\|_1 : x \mapsto |x_1| + \dots + |x_n|$

Prop 4: $x \in E \to \|x\| \in \mathbb{R}^+$ est continue.

Def 5: Lorsqu'un espace vectoriel E est muni d'une norme, on dit que c'est un espace vectoriel normé.

Ex 6:
- $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$
- $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ où $\|\cdot\|_\infty : x \mapsto \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.
- $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ où $\|\cdot\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ pour $1 < p < \infty$
- $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ où $\ell_\infty = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}, (x_n) \text{ est bornée}\}$. $\|\cdot\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$.
- $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ où $\ell_p = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}, \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\}$ et $\|\cdot\|_p = x \mapsto \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ $1 \leq p < \infty$.
- Si A est un ensemble, $(\mathcal{F}_b(A), \|\cdot\|_\infty)$ où $\mathcal{F}_b(A)$ est l'espace des fonctions bornées sur A et $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{x \in A} |f(x)|$.
- Si K est compact, $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ où $\mathcal{C}(K)$ est l'espace des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1)$ où $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$.

C-ex 7: Sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions mesurables $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ telles que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p d\lambda(t) < +\infty$, $\|\cdot\|_p : f \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p d\lambda(t)\right)^{1/p}$ n'est pas une norme car $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ presque partout.

2. Applications linéaires continues.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

Prop 8: Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Alors T est continue ssi il existe une constante $K \geq 0$ telle que
$$\forall x \in E \quad \|T(x)\|_F \leq K \|x\|_E.$$

Def 9: Si T est linéaire continue $T : E \to F$, on définit la norme subordonnée de T par $|||T||| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

Prop 10: Si $T : E \to F$ est linéaire continue, alors
$$|||T||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F$$

Prop 11: Sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F, $T \mapsto |||T|||$ est une norme.

Prop 12: Si F est complet, $\mathcal{L}(E,F)$ l'est aussi.

App 13: $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ le dual de E est toujours complet.

Ex 14: $\delta_0 : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(0)$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$

Def 15: Si $T : E \to F$ est linéaire bijective continue et si $T^{-1} : F \to E$ est continue, on dit que T est un isomorphisme entre E et F.

Prop 16: T est un isomorphisme ssi T est linéaire bijective et il existe deux constantes $0 < \alpha, \beta < +\infty$ telles que
$$\forall x \in E \quad \alpha \|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq \beta \|x\|_E.$$

Def 17: On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes s'il existe deux constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que
$$\forall x \in E \quad k_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq k_2 N_2(x)$$

Rq 18: Cela revient à dire que $id_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est un isomorphisme de E.

Ex 19: Sur $\mathbb{K}^n$, $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes.

C-ex 20: Sur $\mathcal{C}([0,1])$, $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

3. Espaces vectoriels normés de dimension finie.

a- Equivalence des normes.

Thm 21 = Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Ex 22 = Sur $\mathbb{K}^n$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont donc équivalentes.

Corollaire 23 = Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, les fermés bornés sont les compacts.

Ex 24 : Dans $M_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

C-ex 25 = $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ où $\|\sum_{k=0}^{\deg P} a_k X^k\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$ est un espace vectoriel normé et $B = \{P \in \mathbb{R}[X], \|P\| \leq 1\}$ est fermée bornée mais pas compacte.

Corollaire 26 = Tout espace normé de dimension finie est complet

Ex 27 = $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet

Corollaire 28 = Tout ~~sous~~ espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel normé est fermé dans cet espace

Ex 29 = $\mathbb{R}_n[X]$ est fermé dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$

Corollaire 30 = Si E est de dimension finie et F arbitraire, toute application linéaire $E \to F$ est continue.

Ex 31 = Si $f : \mathbb{R}^n \to F$, pour montrer la différentiabilité de f en un point a, il suffit de trouver une application linéaire L telle que $f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{h\to 0}{o}(|h|)$. La continuité est immédiate.

b- Théorème de Riesz.

Thm 32 = La boule unité de E est compacte si E est de dimension finie.

II ESPACES VECTORIELS NORMÉS PARTICULIERS.

1- Espaces de Banach.

a- Définition et premiers exemples.

Def 33 = On appelle espace de Banach tout espace normé complet.

Ex 34 = Tout espace normé de dimension finie est complet.

Ex 35 : $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach. ← Thm 41

b- Un exemple important : les espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$.

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

Def 36 = $\mathcal{L}^p(\mu)$ est l'espace des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{K}$ telles que $\int_X |f(t)|^p d\mu(t) < +\infty$.

On pose $\|f\|_p^p = \int_X |f(t)|^p d\mu(t)$

Inégalité de Minkowski : Pour $1 \leq p < \infty$, pour $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$
$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Rq 37 = $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ n'est pas un espace vectoriel normé car $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ μ.p.p.

Def 38 = On définit $L^p(\mu)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par l'inégalité presque partout.

Prop 39 = $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Thm 40 Riesz-Fisher = Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.

c- Théorèmes fondamentaux.

Thm 41 : Dans un espace de Banach, toute série absolument convergentes est convergente.

Thm 42 = Prolongement des applications linéaires continues = Si E est un espace vectoriel normé, G un sous espace dense dans E, F un espace de Banach. Alors toute application linéaire continue $T : G \to F$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\tilde{T} : E \to F$.

App 43 = La transformation de Fourier $\mathcal{F}$, définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en une isométrie surjective de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même.

2- Espaces préhilbertiens et Hilbert.

a- Espaces préhilbertiens.

Def 44 = On appelle produit scalaire sur E, tout forme bilinéaire symétrique / hermitienne, qui est définie positive. On note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire de $x, y \in E$.

Def 45 = Si E est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace préhilbertien.

Ex 46 = × Sur $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

× Sur $\mathbb{C}^n$ $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

× Sur $L^2(\mu)$, $\langle f, g \rangle = \int f g \, d\mu$ dans le cas réel.

Notation = Pour $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Prop 47 = Pour $x, y \in E$,

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz = Pour $x, y \in E$,

$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.

Corollaire 48 = $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur E.

b- Espaces de Hilbert.

Def 49 = Si un espace préhilbertien est complet pour la norme définie par son produit scalaire, on dit que c'est un espace de Hilbert.

Ex 50 = Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

Ex 51 = $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert

Thm 52 = Thm de projection: Soit E un espace de Hilbert, soit C une partie convexe et fermée, non vide de E, alors:

× Pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x-y\| = d(x, C)$.

On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C.

× $P_C(x)$ est caractérisé par

$y \in C$ et $\forall z \in C$ $\mathrm{Re}(\langle x - y | z - y \rangle) \leq 0$.

× L'application $P_C : E \to C$ est 1-lipschitzienne

× Si F est un sous espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert E, alors $P_F : E \to F$ est une application linéaire continue et $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que

$y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Corollaire 53 = Si E est un Hilbert, alors pour tout sev fermé F, on a $E = F \oplus F^\perp$

Corollaire 54 = Si E est un Hilbert, F un sev de H, alors F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

App 55 - Densité des polynômes orthogonaux

Rajouter = × la transformat° de Fourier comme ex. d'applicat° linéaire continues

× applicat° du thm de projection.

Nouveau plan =

I. Evn

II Appli° linéaires continues

III Evn en dim finie.

IV Espaces de Banach

V Espaces préhilbertiens.