A : Albert Topologie
(Q : Queffelec Topologie)
(G : Gourdon Analyse)
Li = Analyse fonctionnelle

205

Espaces complets. Exemples et applications.

I- Espaces complets

Dans cette section, (M,d) et (L,d') sont 2 espaces métriques

1. Suites de Cauchy

A p 88

DEF 1: On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de (M,d) est de Cauchy si
$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N} \ \ \forall p,q\geq N_\varepsilon \ \ d(U_p,U_q)\leq\varepsilon$

PROP 2: · Toute suite convergente est de Cauchy.
· Toute suite de Cauchy est bornée.
· Toute suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence converge.

DEF 3: (M,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de M converge dans M.

· Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach
· Un espace préhilbertien complet est appelé espace de Hilbert.

EX 4: · $(\mathbb{R},|.|)$ est un espace de Banach, mais $(\mathbb{Q},|.|)$ n'est pas un espace de Banach.
· $(L^2([0,1],\mathbb{R}), <,>_{L^2})$ avec $<f,g>=\int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un espace de Hilbert.

PROP 5: Soit $f: M\to L$ une application uniformément continue. Si $(U_n)_n\in M^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy alors $(f(U_n))_n$ est de Cauchy dans L.

Cor 6: Si d_1 et d_2 sont deux distances équivalentes sur M
On a (M,d_1) complet ssi (M,d_2) complet

prop 7: Tout espace métrique compact est complet.

EX 8: $[0,1]$ est complet dans $\mathbb{R}$; réciproque fausse avec $\mathbb{R}$

2. Propriétés des espaces complets

A. p 88

Prop 9: · Si $L\subset M$ et que L est complet alors L est fermé dans M
· Les sous espaces fermés d'un complet sont complets.

EX 10: * si $\mathbb{Q}$ était complet, il serait fermé or $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.
* $\mathbb{R}^+$ est complet

⚠ la complétude est une propriété métrique. Ce n'est pas une propriété topologique.

Prop 11: si (M,d) et (L,d') sont complets alors le produit $(M\times L, d_\infty)$ est complet avec d_∞ ? $=\max(d,d')$

Rmq 12: on généralise cela au cas de n espaces complets.

Ex 13: $\mathbb{R}^n$ est complet pour n'importe quelle norme

Prop 14: Tout espace normé de dimension finie est complet.

Ex 15: $M_n(\mathbb{C})$ est complet

Prop 16: On a équivalence G
(i) $(E,\|.\|)$ est un espace de Banach
(ii) Tout série absolument convergente est convergente

App 17: Définir exp d'une matrice

Prop 18: Fermés emboîtés. On a équivalence GQ
(i) (M,d) est complet
$\Leftrightarrow$ (ii) Toute suite $(F_n)_{n\geq0}$ décroissante de fermés non-vides de M dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non vide.

Rmq 19: Dans le cas où $M=\mathbb{R}$, c'est le théorème des segments emboîtés.

II- Exemples d'espaces complets

1. Espaces de fonctions continues

A p. 91

Prop 20: Soit $(F,\|.\|_F)$ un espace de Banach et (M,d) un espace métrique quelconque. Les espaces $B(M,E)$ des fonctions bornées et $C_b^0(M,E)$ des fonctions continues bornées munis de $\|.\|_\infty$ définie par
$\|f\|_\infty = \sup_{x\in M}\|f(x)\|_F$ pour $f\in B(M,E)$ ou $C_b^0(M,E)$
sont des espaces de BANACH

On a un exemple sur $H(\Omega)$ où Ω ouvert borné.

DEF 21: Distance qui métrise la convergence uniforme sur tout compact

Pour $(K_n)_n$ une suite de compact dont la réunion donne Ω
$\forall f,g\in H(\Omega) \quad d(f,g)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sup_{K_n}(1,|f(x)-g(x)|)$ est

une distance qui métrise la convergence uniforme sur tout compact.

Thm 22 : $(H(\Omega), d)$ est un espace complet.

2. Espaces L^p $(1 \leq p \leq \infty)$ Briane Pagès L^1 p7

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

DEF 23.

- Si $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ mesurable } \int_E |f|^p d\mu < \infty\}$
- Si $p = \infty$ $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : E \to \mathbb{K} \text{ mesurable } \exists C \ |f| \leq C \ \mu pp\}$

ce n'est pas un evn, donc on définit :

DEF 24 : Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit

$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) / \{f : X \to \mathbb{K} \ f = 0 \ \mu pp\}$

DEF 25 $\|\cdot\|_p$ pour $1 \leq p \leq \infty$

Pour $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$ pour $f \in L^p$

Pour $p = \infty$ $\|f\|_\infty = \inf\{C > 0 \ |f| < C \ \mu pp\}$.

Prop 26 : Inégalité de Hölder

Soient p et q conjugués. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ $(1 \leq p, q \leq \infty)$ alors $fg \in L^1$ et $\int_E |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_\infty$.

Prop 27 : Inégalité de Minkowsky

Soit $p \in [1, +\infty]$ Si $f, g \in L^p$ alors $f + g \in L^p$ et $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Coro 28 : $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Thm 29 : Riesz - Fischer Pour $1 \leq p \leq \infty$ $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach. DEV

3. Applications linéaires continues

Thm 30 : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. L'espace normé $(\mathcal{L}_c(E, F), |||\cdot|||)$ des applications linéaires continues de E dans F est un espace de Banach.

A p92 ou Lip13

Prop 31 (Application) G p49

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, E)$ tel que $|||u||| < 1$ alors $Id - u$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} u^n_E$ qui est dans $\mathcal{L}_c(E, E)$. G p49

Cor 32 : Pour un espace de Banach, E, $GL_c(E)$ les inversibles qui sont continus et d'inverse continu est un ouvert.

III - Théorèmes fondamentaux

1. Prolongement des applications uniformément continues

A p 93 - 94

Thm 33 Soient (M, d) et (L, d') deux espaces métriques tel que (L, d') soit complet. Soit $A \subset M$ une partie dense et $f : A \to L$ une application uniformément continue. Alors il existe un unique prolongement $\tilde{f} : M \to L$ de f. De plus, le prolongement $\tilde{f}$ est uniformément continu.

Appl 34

- Définir l'intégrale de Riemann
- Étendre la transformée de Fourier de $L^1 \cap L^2$ à L^2.

Cor 35 Soient E un espace normé, $F \subset E$ une partie dense et F un espace de Banach. Alors toute application linéaire continue $f : A \to F$ se prolonge de manière unique en une application $\tilde{f} : E \to F$ linéaire continue.

2. Thm du point fixe Rouvière

Thm 35 Soit (M, d) un espace métrique complet. Toute application $f : M \to M$ contractante (de rapport k) admet un unique point fixe $a \in M$. De plus, pour tout $x_0 \in M$ la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a de manière géométrique. + contre ex

Application aux équations différentielles

Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$

DEF 36 Une application $\varphi : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite globalement lipschitzienne (par rapport à sa deuxième variable) si pour tout K compact de I $\exists L_K > 0$ $\forall t \in I$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq L \|x - y\|$.

THM 37 Cauchy - Lipschitz global

Soit $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue et globalement lipschitzienne. Si $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^n$ sont donnés alors le problème DEV.

(P) $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y'(t_0) = y_0 \end{cases}$ a une unique solution définie sur I.

Ex 38

App38* = TIL ou TF ?

3. Théorie de Baire ~~A et G~~ Li

Thm 39 : Lemme de Baire
Soit (M, d) un espace métrique complet.
- si $(O_n)_n$ est une suite d'ouvert dense alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$ est dense
- si $(F_n)_n$ est une suite de fermé d'intérieur vide alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ est d'intérieur vide.

Ap 102 ≡ 104 ✓

App 40 · Un espace vectoriel normé admettant une base dénombrable n'est pas complet. ex = $\mathbb{R}[X]$
~~· Densité des fonctions continues nulle part dérivables~~

6/ p393 · Li ex4 p119 · Li p112

Thm 40 : Banach-Steinhaus
Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soient $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}_c(E, F)$ tel que $\sup\{\|U_i x\|_F, i \in I\} < +\infty$ $\forall x \in E$, alors $\sup\{\|T_i\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}, i \in I\} < \infty$.

Li p114 ex15

Appl 41 · Existence de fonction continue telle que leur série de Fourier ne converge pas en 0.

Thm 41 : Application ouverte (admis)
Soient E, F deux espaces de Banach. Toute application linéaire continue surjective de E dans F est ouverte
ie $\exists\, c > 0$ $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.

Li p114 A/ p10

Cor 42 : Thm d'isomorphisme de Banach.
Si $T : E \to F$ application linéaire continue bijective avec E et F deux espaces de Banach alors T^{-1} est continue.

Li p115 A/ p10

IV - Espaces de Hilbert ~~HL~~ ~~p85=109~~ Li

Soit $(H, \langle , \rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert.

Ex : $(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert

Prop 43 : Inégalité de Cauchy-Schwarz p29.
$\forall x, y \in H$ $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Prop 44 : Identité du parallélogramme p32.
$\forall x, y \in H$ $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Rmq 45 : Prop 43 et 44 restent valables dans un préhilbertien

1. Théorème de projection et Thm de Riesz p32

Théorème 46 Soit $C \subset H$ un convexe fermé de H.
- $\forall x \in H$, $\exists!\, P_C(x) \in C$ $\|x - P_C(x)\| = d(x, C)$
- $P_C(x)$ caractérisé par $P_C(x) \in C$, $\forall z \in C$ $\mathrm{Re}\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle \leq 0$
- $P_C : H \to H$ est 1-lipschitzienne
- Si C est un sous-espace vectoriel fermé de H. $P_C(x)$ est l'unique point : $P_C(x) \in C$ et $x - P_C(x) \in C^\perp$.

Cor 47 : TSO Pour tout sev F de H, $E = \overline{F} \oplus F^\perp$. p37

Thm 48 Riesz p38
Pour toute forme linéaire continue $\Phi : H \to \mathbb{K}$, il existe un unique $x \in H$: $\forall y \in H$ $\Phi(y) = \langle x, y \rangle$.

App 49 · Existence de l'adjoint dans un Hilbert.
(~~Théorème de Lax-Milgram~~)
· Espérance conditionnelle -

2. Bases hilbertiennes

DEF 50 Une base hilbertienne sur H est une famille orthonormée totale p43.

Ex 51 : $(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$.

Prop 52 Soit $(e_n)_{n \in J}$ une famille orthonormale de H et F l'espace vectoriel engendré par cette famille. Pour tout $x \in H$, la projection de x sur F notée $P_F(x)$. $P_F(x) = \sum_{n \in J} (x|e_n) e_n$. p43

Cor 53 Sous les mêmes conditions,
$\sum_{n \in J} (x|e_n)^2 \leq \|x\|^2$ pour $x \in H$

Thm 54 Soit $(e_i)_{i \in I}$ famille orthonormale de H. On a eq p44
(i) $(e_i)_{i \in I}$ base hilbertienne de H
(ii) $\forall x \in H$ $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} (x|e_i)^2$
(iii) $\forall x, y \in H$ $(x|y) = \sum_{i \in I} (x|e_i)(y|e_i)$

App55 = séries de Fourier.