Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité

Développements :

Théorème d'Ascoli. Ellispoïde de John Loewner(FGN Al3)

Bibliographie :

Regarder ds Hauchecorne pour les contre ex Gourdon Analyse(G), Pommelet (Pom), Nourdin, Hirsch Lacombe (HL), Li Analyse fonctionnelle

Soit (E, d) un espace métrique.

1 Présentation "synthétique" de la compacité

1.1 Propriété de Borel Lebesgue

Définition 1 (Compact)**.** [G p. 27] recouvrement fini d'ouverts

Exemple 2 (G p. 27)**.**

Proposition 3 (G p. 27)**.** *compact $\Rightarrow$ borné*

Proposition 4 (G p. 27)**.** *suite décroissante de fermés non vides*

Proposition 5 (G p. 27)**.** *Stable de réunion finie et intersection*

1.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass et conséquences

Théorème 6 (Bolzano-Weierstrass)**.** *[G p. 28]*

Corollaire 7 (Reformulations)**.** *[G p. 30] E est compact ssi toute suite de E admet une valeur d'adhérence ssi toute partie infinie de E admet au moins un point d'accumulation dans E.*

Proposition 8 (G p. 30)**.** *fermé ds compact est compact. Compact $\Rightarrow$ fermé borné*

Proposition 9 (G p.30)**.** *Un espace métrique compact est complet*

Contre-exemple 10. $\mathbb{R}$ complet mais pas compact.

Proposition 11 (G p.30)**.** *unique valeur d'adhérence $\Rightarrow$ converge.*

Contre-exemple 12. Faux si on n'est pas à valeurs ds un compact

Proposition 13 (Nourdin p. 4)**.** *Si (x_n) est une suite réelle, (x_n) converge ssi $exp(itx_n)$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$*

Application 14 (Nourdin p.4)**.** Limite de v.a. gaussiennes est gaussienne

1.3 Extraction Diagonale

Définition 15 (Relative compacite)**.** [HL p.11]

Théorème 16 (Extraction diagonale)**.** *[HL p.11]*

Théorème 17 (Tychonoff)**.** *[HL p.12]*

Application 18 (HL p.12)**.**

2 Compacité et fonctions continues

2.1 Existence d'extrema

Proposition 19 (G p. 31)**.** *f(compact) est compact, où f continue*

Contre-exemple 20 (Hauchecorne)**.**

Proposition 21 (G p. 31)**.** *Soit $f : E \to F$ continue bijective, E compact alors f^{-1} est continue (i.e. f est un homéomorphisme)*

Proposition 22 (G p. 31)**.** *Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes*

Applications :

Proposition 23 (G p. 33 ex 3)**.** *La distance entre deux compacts est atteinte*

Proposition 24 (G p. 33 ex 3)**.** *La distance entre un compact et un fermé disjoints est non nulle.*

Proposition 25 (G p. 33 ex 3)**.** *Une fonction continue sur un fermé non borné, qui admet des limites infinies en l'infini admet un minimum*

Application 26 (Polynômes de meilleure approximation)**.** [Pom p. 296]

Application 27 (Thm de D'Alembert-Gauss)**.** [Pom p. 296]

Théorème 28 (G p.50)**.** *Equivalence des normes en dimension finie*

Corollaire 29 (G p.50)**.** *application linéaire en dimension finie est continue*

Contre-exemple 30 (G p.50)**.** Faux en dim infinie

Corollaire 31 (G p.50)**.** *Dans un e.v.n de dim finie, compacts=fermés bornés.*

Application 32 (Ellipsoïde de John-Loewner)**.**

Corollaire 33 (G p.50)**.** *Tout e.v.n de dim finie est complet*

Corollaire 34. *Tout sev de dim finie est fermé*

Contre-ex :

Théorème 35 (Riesz). *[G p. 56 ex 9] Boule unité compacte ssi E est de dimension finie*

Théorème 36 (Rolle). *[G p. 71]*

Corollaire 37 (Thm des accroissements finis). *[G p. 72]*

Application 38 (Taylor-Lagrange). [G p.73]

2.2 Théorème de Heine

Théorème 39 (Heine). *[G p. 31]*

Application 40. Thm de Weierstrass par les polynômes de Bernstein

2.3 Théorèmes de point fixe

Théorème 41 (Point fixe). *[G p. 34 ex 4] Si E compact, $f : E \to E$, telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ admet un unique point fixe.*

Contre-exemple 42 (G p. 34 ex 4). Plus vrai si on suppose seulement E complet

Théorème 43 (point fixe sur compact convexe). *[G p. 52 ex 2] Soit K un compact convexe d'un evn, et f continue telle que $\| f(x) - f(y) \| \leq \| x - y \|$ alors f admet au moins un point fixe*

Remarque 44. Plus généralement, toute application continue d'un compact convexe dans lui même admet au moins un point fixe (thm de Brouwer)

3 Compacité dans des espaces de fonctions : le théorème d'Ascoli

3.1 Théorème d'Ascoli

Définition 45 (Equicontinuité). [HL p. 37]

Définition 46 (Uniforme equicontinuité). [HL p. 37]

Proposition 47 (HL p. 38). *Sur un compact, unif equiconti ssi equicont*

Théorème 48 (Ascoli). *[HL p. 39]*

Exemple 49 (HL p.39).

(

Application 50 (Cauchy-Peano). [Nourdin p.103]

Application 51 (Thm de Montel). [Nourdin p. 23]

)

3.2 Etude des opérateurs compacts

Paragraphe risqué... mieux vaux l'enlever E, F espaces normés

Définition 52 (Opérateurs compacts). [HL p. 186 ou Li p. 177]

Exemple 53 (HL p. 186 ou Li p. 177). Opérateur de rang fini

Proposition 54 (HL p. 186 ou Li p. 177). *Sev. Fermé si F est complet*

Proposition 55 (HL p. 189 ou Li p. 180). *Si T est compact, $Ker(I - T)$ est de dimension finie, $Im(I - T)$ est fermé, $I - T$ inversible ssi injectif*

Théorème 56 (HL p. 191 ou Li p. 183). *Si E est de dim infinie alors* 0 *est valeur spectrale.*
Toute valeur spectrale non nulle est vp , de sep de dim finie.
Le spectre de T est dénombrable.

Remarque 57 (HL p. 191). Pour les prop spectrales les opérateurs compacts se comportent presque comme des opérateurs de rang fini

Exemple 58 (HL p. 192 ou Li ex 9 p.194).

Exemple 59 (Li p192 ex2).

4 Alternative 3 : Compacité en dimension infinie

4.1 Riesz

4.2 Stone-Weierstrass

4.3 Ascoli