202 Exemples de parties denses et applications.

Gourdon Analyse LI
Gourdon Algèbre OA

DEF 1 Densité DEF 1.0
PROP 2 : caractérisation de la densité par les suites) Gourdon Analyse p10

I - Exemples de parties denses en dim finie

1. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Gourdon Analyse +

- PROP $A \subset \mathbb{R}$ dense ssi $\forall a<b$ $]a,b[\cap A \neq \emptyset$. ex7 p10
  Appli $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dense
- SOUS GROUPE ADDITIFS de $\mathbb{R}$. EXO 5 p 199 Gourdon
  PROP : Les sous groupes de $\mathbb{R}$ sont soit denses soit de la forme $m\mathbb{Z}$.
  cor : $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ dense ds $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. + avec $\mathbb{N}$
  Appli val d'adh de $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont $[-1,1]$.
- EQUIREPARTITION FGN
  DEF suites équiréparties
  DEF densité mod 1
  rmq : porte suivante on a un critère d'équirépartition

2. Dans $M_n(\mathbb{K})$. Gourdon algèbre

PROP : $GL_n(\mathbb{K})$ dense ds $M_n(\mathbb{K})$ prop 2 p 183
Appli on montre $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ exo 3 p187
PROP L'ensemble des mat diago à val propres $\neq$ est dense ds l'ens des matrices trigonalisables.
(valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). OA p179 4.69

PROP : Ensemble des matrices diago à vp $\neq$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$
cor : Ensemble matrice diago dense dans $M_n(\mathbb{C})$
cex dans $M_n(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ exo 1 p185
Appli preuve de Cayley-Hamilton p186 exo1 rmq
Appli : calcul diff de det

II - Dans les espaces de fonctions

1. Dans l'ens des fct $\mathcal{C}$.

Thm Weierstrass LI
Appli $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}$ $\int_0^1 t^n f(t) = 0 \Rightarrow f = 0$ Gourdon Analyse p 206
Thm SW réel LI p46 (admis)
Thm SW complexe LI p52
Appli : polyn trigo dense ds fct $\mathcal{C}$ 1-périodiq sur $\mathbb{R}$ p54 LI
ex : preuve critère de Weyl
Thm : Fct $\mathcal{C}$ 1-periodiq dense dans L^2. LI p56
Appli : le système trigo est une b-o-n. de L^2.

2. Dans les espaces L^p

Thm : Fct étagée dense ds L^p. (ds la preuve du thm di le LI p76)

Thm C_c^0 dense ds $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ LI p76.
DEF convolut° LI p75
DEF suite régularisante LI p83
Thm $f \in L^r$ et $\varphi \in C_c^k$ alors $f * \varphi \in C^k$) LI p85
Thm : C_c^∞ dense ds $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$
Lemme : Fct 1-periodique dense ds $L^1[0,1)$ LI p60

III - DENSITE ET COMPLETUDE

1. Prolongem^t appli u.c Albert

Thm (Prolongem^t appli u.c)
rmq appli lin
Appli : définir int de Riemann
Appli $L^1 \cap L^2$ dense ds L^2 $\to$ Fourier Plancherel.

2. Espaces de Hilbert

a - Conséquence du thm de project°

Thm TSO

cor : critère de densité

ex

b- Bases hilbertiennes LI

DEF : famille orthonormée LI p42-43.

DEF base hilbertienne

PROP : caractérisat° b.h. LI p44

Thm : Espace de Hilbert possède b.h (séparable)

Thm #314 p45

ex (en) bh de L^2

OA

DEF Fct poids ; $L^2(I,\rho)$

Thm polynôme orthogonaux format une b.h

ceX sans condit° d'écrasent

ex polynome orthogonaux

IV - THEORIE BAIRE A16

102-104 Thm Lemme Baire

App evn admettant une base dénomb $\not\subset$ complet

App densité fct $\subseteq$ nulle part d

Thm Banach - Steinhaus.

Appl fct $\subseteq$ tq $\sum$ Fourier ne CVG $\not\subset$ en 0

Thm Appli ouverte

cor : isom de Banach.