Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Développements :

Ascoli, Riesz-Fischer, Weierstrass

Bibliographie :

Hauchecorne(H), Gourdon (G), Tauvel Analyse complexe (T), Li Analyse fonctionnelle (L)

Plan

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, K compact

1 Fonctions régulières

1.1 Fonctions continues, lipschitziennes, uniformément continues [H]

Définition 1. continue

Définition 2 (H p.144)**.** uniformément continue

Proposition 3 (H p.144)**.** *U.c implique continue*

Contre-exemple 4 (H p.145)**.** Réciproque fausse

Théorème 5 (H p.144)**.** *Thm de Heine*

Définition 6 (H p.144)**.** Lipschitzienne

Proposition 7 (H p.144)**.** *Lipsch implique u.c.*

Contre-exemple 8 (H p.145)**.** Réciproque fausse

1.2 Fonctions continues sur un compact [G et L]

Proposition 9 (G p.31)**.** *L'image d'un compact par une application continue est compacte*

Proposition 10 (G p.31)**.** *continue bijective sur un compact est d'inverse continue*

Proposition 11 (G p.31)**.** *Bornée et atteint ses bornes*

Proposition 12 (L p.10)**.** $\mathcal{C}(K), \|.\|_\infty$ *est un Banach.* $mathcalC^k(K), \|.\|_\infty^{(k)}$ *est un Banach.*

Contre-exemple 13 (L p.10)**.** $C(K), \|.\|_1$ n'est pas complet

1.3 Parties compactes [L]

Définition 14 (L p. 179)**.** équicontinuité

Théorème 15 (L p. 179)**.** *Ascoli*

Application 16 (L p. 180)**.** Montrer qu'un opérateur est compact

1.4 Parties denses

Théorème 17 (L p.50)**.** *Weierstrass*

Application 18 (G p.286)**.** Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ continue d'intégrale nulle contre t^n alors f est nulle

Théorème 19 (L p. 46)**.** *Stone-Weierstrass*

Application 20.

2 Applications linéaires continues [L]

En bonus, si y a de la place +Banach Steinhauss

3 Fonctions holomorphes [T]

Définition 21. holomorphe

Exemple 22.

Proposition 23 (T p.76)**.** *Thm de Cauchy*

Proposition 24 (T p.77)**.** *Formule de Cauchy*

Proposition 25 (T p.78)**.** *Holomorphe equivalent à analytique*

Théorème 26 (T p.85)**.** *Liouville*

Proposition 27 (T p.86)**.** *Principe du maximum*

Proposition 28 (T p.52)**.** *Principe du prolongement analytique*

Théorème 29 (T p.89)**.** *Weierstrass cf de suites holo*

Application 30. Montrer qu'une série de fonctions holomorphes est holomorphe

Proposition 31. *Sous espace fermé de l'ensemble des fonctions continues*

4 Espaces L^p [L]

4.1 Structure

Li p.7 + Riesz-Fischer

4.2 Parties denses

Proposition 32 (L p.76)**.** *L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans* L^p

Définition 33 (L p.75)**.** Convolution

Définition 34 (L p.83)**.** Suite régularisante

Exemple 35 (L p.82)**.**

Proposition 36 (L p.82)**.** *Convergence de la convolée*

Corollaire 37 (L p.85)**.** *Fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ *à support compact dense dans* L^p

Proposition 38. $A(\mathbb{R})$ *dense dans* L^2.

Application 39. Prolongement de la transformée de Fourier à L^2

5 Espace de Schwartz