181

Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications

Cadre : $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension $n<\infty$.

I_ Barycentres

1) Définitions et premières propriétés ([MER] p34-36)

Def 1 : Un système de points pondérés $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$ est la donnée de n points $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{E}$ et de n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. À ce système, on associe la fonction de Leibniz $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{MA_i}$

Rmq 2 : Pour tout $O \in \mathcal{E}$, $f(M) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\vec{MO} + f(O)$
↳ si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors f est constante
↳ si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors f est bijective

Def 3 : Le barycentre de $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$ où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ est l'unique point G vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$, ou, de façon équivalente $\vec{OG} = \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{OA_i}$ où O est un point quelconque de $\mathcal{E}$

Prop 4 : Propriétés de la barycentration
Soit G le barycentre de $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$
1) Homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, G est barycentre de $A_1(\lambda\alpha_1), \dots, A_n(\lambda\alpha_n)$
2) Commutativité : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, G est barycentre de $A_{\sigma(1)}(\alpha_{\sigma(1)}), \dots, A_{\sigma(n)}(\alpha_{\sigma(n)})$
3) Associativité : Soit $J \subset [\![1,n]\!]$ et $s = \sum_{i\in J} \alpha_i$. Si $s \neq 0$ alors G est barycentre de $\{A_i(\alpha_i)\}_{i \notin J}$ et $g(s)$ où g est le barycentre de $\{A_i(\alpha_i)\}_{i\in J}$

Def 5 : L'isobarycentre de n points $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{E}$ est le barycentre du système pondéré $A_1(\frac{1}{n}), \dots, A_n(\frac{1}{n})$. L'isobarycentre du système formé par deux points A et B est appelé le milieu du segment $[AB]$

Appli 6
* Les trois médianes d'un triangles sont concourantes en un point G l'isobarycentre situé au tiers de la base de chacune d'elle.
* L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le milieu des diagonales et appartient aux droites passant par les milieux de deux côtés opposés
* L'isobarycentre des sommets d'un tétraèdre est situé au 1/4 de la base de chacun des segments d'extrémités un sommet et le centre de gravité de la base opposée et coïncide avec le milieu des segments d'extrémités les milieux des deux arrêtes opposées

2) Lien entre ~~sous-espaces affines~~ structure affine et barycentration [MER] p37-38

Thm 7 : Le sous-espace affine engendré par une partie non vide A de $\mathcal{E}$ est égal à l'ensemble des barycentres des points de A.

Ex 8 : - Pour 2 points distincts A et B, on obtient la droite (AB)
- Pour 3 points non-alignés A, B et C, on obtient le plan (ABC)

Thm 9 : Une partie non vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine ssi elle est stable par barycentration ssi elle est stable par barycentration de deux points quelconques

3) Repérage [MER] p39-41

Thm 10 : Soit $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{E}$. On a les équivalences :
1) $\forall j \in [\![0,k]\!]$, la famille $(\vec{A_iA_j})_{i\neq j}$ est libre
2) $\forall j \in [\![0,k]\!]$, A_j n'est pas dans le sous-espace affine engendré par les $(A_i)_{i\neq j}$
3) $\exists j \in [\![0,k]\!]$, la famille $(\vec{A_iA_j})_{i\neq j}$ est libre

Def 11 : Une famille de points $(A_0, \dots, A_k)$ est dite affinement libre si elle vérifie une des conditions du théorème précédent.

Def 12 : Un repère affine (ou une base affine) de $\mathcal{E}$ est un $(n+1)$-uplet $(A_0, \dots, A_n)$ de points affinement libres

Rmq 13 : Cela signifie que $(A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine ssi la famille $(\vec{A_0A_1}, \dots \vec{A_0A_n})$ est une base de l'espace vect. associé.

Def 14 : Soit $\mathcal{R} = (A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, $M \in \mathcal{E}$. On appelle système de coordonnées barycentriques de M dans $\mathcal{R}$ tout n-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ tel que M soit le barycentre de $A_0(\alpha_0), \dots, A_n(\alpha_n)$

Le système est dit normalisé si $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$

Thm 15 : Deux systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point sont proportionnels. Le système de coordonnées barycentrique normalisé d'un point est unique.

C-ex 16 : Il faut que $\mathcal{R}$ soit un repère affine.
Si A_0 est le milieu de $[A_1A_2]$ alors $A_0 = \mathrm{Bary}(A_0(1), A_1(0), A_2(0))$ et $A_0 = \mathrm{Bary}(A_0(0), A_1(1), A_2(1))$ et pourtant $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$ ne sont pas proportionnels.

4) Interprétation en terme d'aires ([TRU] p47)

Dans cette section, ABC désigne un triangle non-plat et M désigne un point du plan (ABC) tel que $M \notin (AB)\cup(AC)\cup(BC)$

Def 17 : L'aire algébrique du triangle MBC est son aire géométrique affectée du signe (+) s'il a même orientation que ABC et du signe (-) sinon.

Prop 18 : Dans le repère (A,B,C), les aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB forment un système de coordonnées barycentriques de M.

Appli 19 : Soit ABC un triangle. On pose $a=BC$, $b=CA$ et $c=AB$.
* Le centre du cercle inscrit dans ABC a pour coordonnées barycentriques (a,b,c) dans le repère (A,B,C)
* Le centre du cercle circonscrit à ABC a pour coordonnées barycentriques $(\sin(2\hat{A}), \sin(2\hat{B}), \sin(2\hat{C}))$ dans le repère (A,B,C)
* $(\tan(\hat{A}), \tan(\hat{B}), \tan(\hat{C}))$ est un syst de coord barycentriques de l'orthocentre dans le repère (A,B,C)

3) suite
~~5) Applications des barycentres~~ [MER] p45-47, [TRU] p51-52

Def 20 : Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines réels, associés aux espaces vectoriels E et F. On dit que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine ssi il existe $\vec{f} : E \to F$ linéaire et telle que

$$\forall M,N \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN})$$

Thm 21 : Une application est affine ssi elle conserve le barycentre.

Thm 22 Menelaüs
Soit un triangle ABC et trois points A', B' et C' situés respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB), tous distincts des sommets.
Les points A', B', C' sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$

Thm 23 Ceva
Soit un triangle ABC et trois points A', B', C' situés respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB), tous distincts des sommets.
Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles ssi $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$

5) Points particuliers du triangle
Truffault p42

II - Convexité

1) Définitions et premières propriétés [TAU] p69-70

Def 24 : Soient $A, B \in \mathcal{E}$. L'ensemble $[AB] = \{M \in \mathcal{E} \,/\, \exists t \in [0,1], \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$ est appelé segment d'extrémités A et B.

Def 25 : Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de $\mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$. On dit que B est combinaison convexe de $(A_i)_{i\in I}$ s'il existe $(t_i)_{i\in I}$ presque nulle avec $\forall i \in I, t_i \geq 0$, $\sum_{i\in I} t_i = 1$ et $B = \sum_{i\in I} t_i A_i$

Def 26 : $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est dite étoilée en $M \in \mathcal{A}$ si $\forall N \in \mathcal{A}$, $[MN] \subset \mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ est dite convexe si $\mathcal{A}$ est étoilée en tous ses points. ($\forall M, N \in \mathcal{A}$, $[MN] \subset \mathcal{A}$)

Ex 27 :
* Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles
* Les sous-espaces et les boules de $\mathcal{E}$ sont convexes
* Toute intersection de convexes est convexe
* L'image directe et l'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe
* L'adhérence d'un convexe est convexe (continuité de $(M,N) \mapsto (1-t)M + tN$)
* Si A et B sont convexes alors A+B aussi

[FGN] p229

Appli 28 (Ellipsoïde de John-Loewner) DEV
Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K

2) Enveloppe convexe [TAU] p71-72

Def 29 : Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. L'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{A}$ est le plus petit convexe contenant $\mathcal{A}$. On l'appelle l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ et on le note $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$

Thm 30 : L'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de $\mathcal{A}$.

Prop 31 Thm de Lucas. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P

Prop 32 Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$
1) L'intersection des convexes fermés contenant $\mathcal{A}$ est $\overline{\mathrm{Conv}(\mathcal{A})}$
2) Si $\mathcal{A}$ est convexe et compacte, on a $\mathcal{A} = \mathrm{Conv}(\partial\mathcal{A})$
3) Si $\mathcal{A}$ est ouvert, alors $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ l'est aussi

Rmq 33 : Si $\mathcal{A} = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid xy \geq 1\}$ alors $\mathrm{Conv}(\mathcal{A}) = \{(0,0)\} \cup (\mathbb{R}^{+*})^2$ donc l'enveloppe convexe d'un fermé ne l'est pas forcément.

DEV
Thm 34 : Carathéodory
Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$. Tout élément de $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de $\mathcal{A}$ avec $k \leq 1 + \dim(\mathcal{E})$

Coro 35 Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$
1) Si $\mathcal{A}$ est compacte alors $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ aussi
2) Si $\mathcal{A}$ est bornée alors $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ aussi et $\delta(\mathcal{A}) = \delta(\mathrm{Conv}(\mathcal{A}))$ où $\delta(\mathcal{A}) = \sup\{MN \mid M, N \in \mathcal{A}\}$

3) Points extrémaux [TAU] p82-83

Def 36 : Soit $\mathcal{A}$ un convexe de $\mathcal{E}$, $M \in \mathcal{A}$. On dit que M est extrémal si $\forall P, Q \in \mathcal{A}$, $\forall t \in]0,1[$, $M = tP + (1-t)Q$ entraine $M = P$ ou $M = Q$. L'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{A}$ est noté $\mathrm{Extr}(\mathcal{A})$

Ex 37 Si $0 \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\mathrm{Extr}(\overline{B}(0,r)) = \mathcal{S}(0,r)$

Prop 38 : Soit $\mathcal{A}$ un convexe de $\mathcal{E}$ et $M \in \mathcal{A}$. Sont équivalents :
1) $M \in \mathrm{Extr}(\mathcal{A})$
2) $\mathcal{A} \setminus \{M\}$ est convexe
3) Si M est combinaison convexe d'éléments de $\mathcal{A}$, M est égal à l'un de ces éléments.

~~**Thm 39** (Krein-Milman) Pour tout convexe compact non vide $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$, on a $\mathcal{A} = \overline{\mathrm{Conv}(\mathrm{Extr}(\mathcal{A}))}$~~

[FGN] p130

Appli 40 : Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ DEV
Soit E un espace euclidien et $B = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid |||u||| \leq 1\}$. Les points extrémaux de B sont exactement les éléments de $\mathcal{O}(E)$.

4) Résultats de séparation [TAU] p79

Thm 41 Hahn-Banach géométrique. Soit $\mathcal{A}$ un ouvert convexe non vide et $\mathcal{L}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{A} \cap \mathcal{L} = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ vérifiant $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{H} = \emptyset$.

C-ex 42 Si $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L} = \{(2,0)\}$ et $\mathcal{A} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \cup (]0,1] \times \{0\})$ (car $\mathcal{A}$ n'est pas ouvert)

Def 43 : Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ hyperplan de $\mathcal{E}$.
1) $\mathcal{H}$ sépare $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A}$ est contenu dans l'un et $\mathcal{B}$ dans l'autre des demi-espaces fermés déterminés par $\mathcal{H}$
2) $\mathcal{H}$ sépare strictement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A}$ est contenu dans l'un et $\mathcal{B}$ dans l'autre des demi-espaces ouverts déterminés par $\mathcal{H}$.

Thm 44 : Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des convexes non vides et disjoints de $\mathcal{E}$.
1) Si $\mathcal{A}$ ouvert, il existe un hyperplan séparant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
2) Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ouverts, il existe un hyperplan les séparant strictement
3) Si $\mathcal{A}$ compact et $\mathcal{B}$ fermé, il existe un hyperplan les séparant strictement
4) Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont fermés, il existe un hyperplan les séparant.

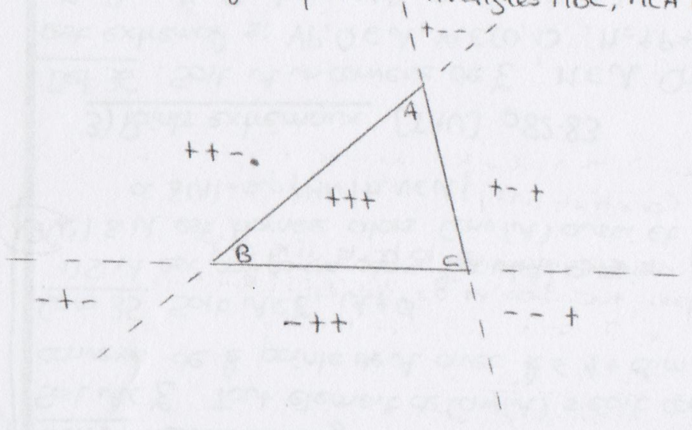
5) Théorème de Helly [TAU] p83

Thm 45 : Soient $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$ convexes de $\mathcal{E}$ tel que $\forall J \subset [\![1,s]\!]$ tel que $|J| = s-1$ on ait $\bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j \neq \emptyset$. Alors il existe des convexes compacts $B_1, \dots, B_s$ tels que $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $B_i \subset \mathcal{A}_i$ et $\bigcap_{j \in J} B_j \neq \emptyset$ ($\forall J \subset [\![1,s]\!]$ tq $|J| = s-1$)

Thm 46 (Helly). Soit $n = \dim(\mathcal{E})$, I un ensemble avec $|I| \geq n+2$ et $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de convexes de $\mathcal{E}$ tq $\bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j \neq \emptyset$ $\forall J \subset I$ tq $|J| = n+1$. Si les $\mathcal{A}_i$ sont compacts ou si I est fini alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \neq \emptyset$

Annexe

Signes des aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB



Références

[MER] : D-J Mercier, "Cours de géométrie. Préparation au CAPES et à l'agrégation" 2e édition. Ou dans "Fondamentaux de géométrie pour les concours"

[TRU] : B- Truffault, "Géométrie élémentaire"

[TAU] : P. Tauvel, "Géométrie", 2e édition

[FGN] : Francinou, Gianella, Nicolas, "Oraux X-ENS Algèbre 3"

Plan de Florian Lemmonier, adapté