170

Formes quadratiques sur un ev de dim finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Clement de Seguins Pazzis, Invitat aux formes quadratiques

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$. p 23
Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dim finie

I - GENERALITES — Invit fq p 25 → 31

1 - FORMES BILINEAIRES ET QUADRATIQUES

DEF : forme quadratiq associée à une forme bilinéaire 20.7 p29
Notat° $Q(E)$ = ens fq.
Rmq fq nulle ssi b alternée 20.8 p29
PROP $Q(E)$ sev de ens fct $E \to \mathbb{K}$.
rmq dim $Q(E)$ exo 7a) p43
PROP forme polaire bq d'une fq 20.9 p 30
EX : $\cdot\ A \mapsto tr(A^2)$ fq de fpol $(A,B) \mapsto tr({}^tAB)$
$\cdot$ det sur $M_2(\mathbb{K})$ fq de fpol $(A,B) \mapsto \frac{1}{2}(AB+BA)$ (ii) et (iii) p 31
PROP Polarisat°
DEF Espace quadratique (E,q)

2 - REPRESENTATION MATRICIELLE — Invit fq p 32

DEF matrice forme bilinéaire p 26 13.1
EX : $A \in M_n(\mathbb{R})$ $(X,Y) \to {}^tXAY$ matrice A 13.2 p26
DEF matrice forme quadratiq. 3.4.1 p 32.
EX $(x,y,z) \mapsto x^2+2y^2-3z^2+2xy-4xz+4yz$.
+ matrice ex 3.22 p 33
PROP : chgmt de base prop 3.4.2 p 32.
Rmq : matrices représentant m fq forment une classe de congruence ?
rmq : $A \in S_n(\mathbb{R})$ $X \mapsto {}^tXAX$ fq sur $\mathbb{R}^n$ fq associée à A
rmq 3.1.5 p 33

3 - RANG, NOYAU ET DETERMINANT p 50 + p 53

on notera $q \in Q(E)$ de forme polaire b
DEF noyau forme quadratiq 2.0.10 p 50
EX noyau $X \mapsto {}^tXAX$ est ker A 20.44 p 50
PROP Rang 20.43 p 50
EX $(x,y,z) \mapsto x^2-2y^2-3z^2+4xy+6xz$ 20.14 p51
ker et rg.
DEF fq non dégénérée 20.16
EX $A \mapsto tr(A^2)$ non deg. 20.17 p 51
DEF déterminant 4.0.27 p 53.
EX . det : $(x,y) \mapsto xy$ classe -1 ds $\mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$
$\cdot\ (x,y,z) \mapsto x^2+y^2-z^2$ et -1. 4.0.28 p 53.

II - ORTHOGONALITE ET ISOTROPIE

1 - ISOTROPIE

DEF vecteur { isotrope / anisotrope fq } 3.0.19 p 52
DEF cône isotrope 3.0.22
rmq pas un sev de E. 3.0.24 p 52/53
rmq $\ker q \subset C\mathcal{O}(q)$ recip fausse 3.0.23 p 52.
+ cex.

2 - ORTHOGONALITE

a - Généralités

DEF $x, y \in E$ sont b-orthogonaux
rmq : x b orthog à $y_1 \dots y_n$ alors x b-orth à tte CL de $y_1 \dots y_n$
rmq 3.0.58
. ker b = vect b-orthog à E.
. x et y b orth ssi $q(x+y) = q(x)+q(y)$
DEF parties orthogonales 4.1.1
DEF b-orthogonal de A 4.1.2 p 69
rmq : $A^{\perp b}$ = + gde partie de E b-orth à A. p 4.1.3 p69
PROP sur les orthogonaux (inclus°, somme, intersect°, ...) 4.1.5 p 70
EX $S_n(\mathbb{K})^{\perp} = A_n(\mathbb{K})$ pr $(X,Y) \mapsto tr(XY)$. EX 4.16 p 70

b - Espaces réguliers

DEF : fq régulière p65 10.48
DEF ev régulier p65 10.51

PROP : un sev b-regulier ssi $A \cap A^{\perp b} = \{0\}$ 4.17 p71

PROP : b reguliere $A \subset B \Rightarrow B^{\perp b} \subset A^{\perp b}$. 4.24 p71 / 4.22 p71

Thm dimens° orthogonale

PROP A, B sev de E et b reg $(A \cap B)^{\perp b} = A^{\perp b} + B^{\perp b}$ 4.23 p71

cor : dble orthogonal   4.24 p72

PROP A b reg ssi $A \oplus A^{\perp b} = E$ (cas b regulier). 4.27 p72

+ prop 4.3.1 p73.

+ cor 428 p 72.

3 - GROUPE ORTHOGONAL   H2G2 + Pazzis

DEF automorphisme orthogonal de (E, q) noté $O(q)$

$O(q) = \{u : E \to E$ isomorphisme $q \circ u = q\}$. 5.0.30 p54

PROP : $O(q)$ s/s gpe de $GL(E)$ = gpe orthog. 5.0.31 p 54

rmq $O(\lambda q) = O(q)$ 5.0.32 p54

EX reflex° orthogonale   5.0.33 p54

PROP $u \in O(q) \Rightarrow \det u = \pm 1$ 5.0.35 p55.

DEF $O(p, q)$ A1 p359

PROP $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ prop A2 p 360

Pazzis.

à voir (H2G2 p359 360)

III - CLASSIFICATION

(*)

1. REDUCTION s/s forme diago

Pazzis p87

DEF Famille q-orthogonale 1.1.1 p87

PROP : EQU (i) $\exists$ base q-orthogonale   (iii) $q = \sum_{k=1}^{n} a_k (e_k^*)^2$

(ii) $Mat(q, B)$ diagonale

1.1.2 p88

1.1.3 p88 EX base (E_{ij}) de $M_n(\mathbb{K})$ orthog pr $A \mapsto tr({}^tAA)$

1.2.1 p89 THM : Tout espace quadrat de dim finie admet une base orthogonale 1.2.1 p89

Algorithme réduct° de Gauss

paragraphe 3.2 p94

EX $q(x,y,z,t) \longmapsto xy - 2xz - 4yz + 2xt + zt$.

$q \simeq \langle 1, -1, 8, 49/32 \rangle$.

+ exemple exo 14 p98.

(*) DEF morphisme / isomorphismes entre espace quadratq 5.2.1 p41

DEF : forme quad equivalentes

PROP (i) q et q' equivalentes   cor 5.2.3 p41

(ii) q et q' m̃ classe de congruence de matrices sym.

(iii) ——— representés par le m̃ polyn homog de degré 2

Po p

2. CLASSIFICATION SUR $\mathbb{C}$ p100

Thm : fq complexe de rang r et de dim n on a $q \simeq r\langle 1 \rangle \perp (n-r)\langle 0 \rangle$. Ds une bonne base $Mat\, q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Thm : fq equiv ssi ont m̃ rg.   1.0.1 p100

3. CLASSIFICATION sur $\mathbb{R}$ p100 -

$\mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2$ a 2 classes representées par 1 et -1.

PROP (E, q) esp quadratq de dim finie $\exists r, s$

$q \simeq r\langle 1 \rangle + s\langle -1 \rangle + (n-r-s)\langle 0 \rangle$.   2.1.1 p101

+ repstat° matricielle

DEF signature   2.3.1 p104

THM (Inertie Sylvester).   2.3.2 p104

cor : fq réelles sont eq ssi de m̃ signatures

EX : $(x,y,z,t) \longmapsto xy - 2xz - 4yz + 2xt + zt$

est eq à $\langle 1, -1, 8, \frac{49}{32} \rangle$ car m̃ sgn (3, 1).

. sgn de $A \mapsto tr({}^tAA)$.   2.3.5 p105

Rmq : Forme quadratq positive $s = 0$. ds la sgn. p101

DEF : forme quadrat def positive p101

PROP CYS

PROP Minkowsky.) p103

DEF Ellipsoide + JOHN LOEWNER. || DEV.

3. CPS FINIS H2G2.

DVLPT : loi de la réciprocité quadratique

IV- APPLICATIONS

1- CALCUL DIFF DA

PROP $d^2f(a)$ diff seconde forme bilin sym.

PROP · f a un min local en a alors $d^2f(a) \geq 0$

· si $d^2f(a)$ fq def positive alors a min local strict

CEX $x \mapsto x^3$ ∄ minimum local et $f''(0) = 0$

2- Coniques

Def = coni q

Thm = quelle conique en fct° de quelle signature

Plan essentiellement repris de Mégane BOURNISSOU et Jérémy MARTIN