162 — Systèmes d'équations linéaires. Opérations élémentaires, aspect algorithmiques et conséquences théoriques.

Dany-Jack Mercier (DJM)
Allaire

I- ETUDE DES SYSTEMES LINEAIRES

1. GENERALITES DJM 3.1.1 p 57

soit $\mathbb{K}$ corps commutatif. soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.
soient $a_{11}, \dots a_{np}, b_1, \dots b_n \in \mathbb{K}$.
on cherche $(x_1, \dots x_p) \in \mathbb{K}^p$ tq.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 \dots a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad (S).$$

(S) = syst linéaire à n équat° et p inconnues $x_1, \dots x_p$.
solut° c'est $(x_1, \dots x_p)$

Rmq : le syst (S) s'écrit $AX = B$
$A = (a_{ij}) \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Rmq (S) s'écrit $u(X) = b$.
où u appli linéaire de $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ de matrice A ds les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$

a- Compatibilité DJM p 58 → 60.

PROP $u(x) = b$ a une solution ssi $b \in \mathrm{Im}\, u$
Cette condit est la condit de compatibilité. p 58 3.1.2

rmq : En désignant $a_j = {}^t(a_{1j} \dots a_{nj})$ $j$ème vect col de A.
$b \in \mathrm{Im}\, u$ ssi $\mathrm{rg}\underbrace{(a_1, \dots a_p, b)}_{\stackrel{\text{déf}}{=} A'} = \mathrm{rg}\underbrace{(a_1 \dots a_p)}_{= A}$

DEF : matrice principale
DEF matrice bordante.
rmq $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$ ssi toute matrice bordante de A' qui utilise la dernière colonne b n'est $\not\in$ inv

DEF matrice caractéristique - déterminant caractérist.
Thm condit° de compatibilité

3.1.4 p 59-60 EX $(*)$ compatible ssi $b = {}^t(-7\ 13\ 5\ 6\ -14)$

b- Structure des solut°

Thm : Ens des solut° est $x_0 + \ker u$. où x_0 solut° particulière de $u(x) = b$. le sous espace affine des solution S est de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$.

2- Syst de CRAMER - DJM 3.1.3 p 59

Cadre A est carré et inversible

Thm : Existence et unicité de la solution

Thm on obtient x_k par
$$x_k = \frac{\det(a_1, \dots a_{k-1}, b, a_k, \dots a_n)}{\det(A)}$$
où a_i colonne de A

EXEMPLE : Résolution de $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -7 - 7x_3 \\ 5x_1 - x_2 = 13 + 13x_3 \end{cases}$
d'inconnue (x_1, x_2)
et x_3 est un paramètre. P 62 DJM
$x_1 = 2x_3 + 2$ et $x_2 = -3x_3 - 3$.

COMPLEXITE ?

3- THM ROUCHE- FONTENAY 3.1.5 DJM p60

Soit (S) syst linéaire (de matrice pcipale $P = (a_{ij})$ extraite de A) qui vérifie relation du thm de compatibilité

DEF : Inconnues et éq pcipales
notat° (S_p) syst linéaire des équat° pcipales.
PROP (S) et (S_p) sont équivalents.
Thm Rouché - Fontenay

EX
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & -1 & 13 \\ 13 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & -6 \\ 7 & 0 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_5 \end{pmatrix} \quad (*)$$
avec la condit° de compatibilité

3.2.4 DJM p

II - METHODES DIRECTES

1 - OPERATIONS ELEMENTAIRES

DEF : operations élémentaires
permutat° de lignes / multip par un scalaire / addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

rmq cela transforme le syst en un syst équivalent

Interpretation en terme matriciel

1) • DEF matrice de permutation — A) p 69 DJM

3.3.1 DJM p69 à 72

Thm 45 : $\Psi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow GL(n)$, $\sigma \longmapsto M_\sigma$ morph de gps.

$\det M_\sigma = \varepsilon_\sigma$ et $M_\sigma^{-1} = {}^tM_\sigma = M_{\sigma^{-1}}$

Interpretat° Multiplier A à gauche par M_σ permute les lignes de A suivant σ^{-1}

2) Matrices d'affinités — B) p 70 DJM

DEF : matrice d'affinités $D_p(\lambda)$

Interp. multiplier A à gauche par $D_e(\lambda)$ = multiplier la ieme ligne par λ.

3) Matrices de transvect°

DEF : matrice de transvect° $U_{ij}(\lambda)$

Interp : multiplier A à gauche par $U_{ij}(\lambda)$ revient à remplacer la ieme ligne de A par la somme de cette ligne et de λ fois la j-eme ligne

Annexe RESUME OPERAT° ELEMENTAIRES D p72 DJM

2 - PIVOT DE GAUSS

DEF : syst echelonné (à faire) p64 DJM

Pcipe : utiliser op élémentaires sur les lignes pour aboutir à un syst echelonné

Algorithme p 64 DJM.

on ecrit (S') p 64.

Rmq : si l'une des n−r eq $b_j = 0$ n'est ∅ satisfaite le syst n'a ∅ de solutions. Les eq $b_j = 0$ $n \geq j \geq n-r$ representent les condit° de compatibilité

DEF Sous ces condit° $x_1, \dots x_r$ solut° pcipales et $x_{r+1}, \dots x_n$ solut° secondaires (paramètres)

rmq si $rg(A) = n = p$ A est inversible on peut aussi utiliser Cramer.

Ex Resolut°
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 2 \\ -3x_1 - 5x_2 + 12x_3 - x_4 = 16 \\ 5x_1 + 9x_2 - 16x_3 + 2x_4 = -23 \end{cases}$$

solut° $\left\{ \left(\frac{15t-43}{2}, \frac{17-7t}{2}, \frac{t-1}{2}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$

b - Thm existence

Thm 46, Thm 47) DJM p 76-77.

c - Autres utilisat° DJM p73

• Calcul du rang 3.3.3 p73 DJM

Ex $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

• calcul de determinant ex Vandermonde 3.3.4 p74 DJM

• calcul d'inverse

ex $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

LIMITES Il existe parfois des moyens qui permettent de resoudre un syst lineaires + simplement
ex 1 avec utilisat° inc $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

+ echelonnée réduite p80.

DJM.

COMPLEXITE ?

3 - METHODES LU et Cholesky All

a - DECOMPOSITION LU All p420

Pcipe : On decompose $A = LU$ à L triang inf et U triangulaire supérieure.

Resolution $Ax = b$ se fait par resolution de syst triangulaire $Ly = b$ et $Ux = y$.

THM si A a tous ses mineurs non-nuls, on a existence et unicité d'une telle decomposit° prop B.1.15

Nombres opérations.

Elimination $\simeq n^3/3$ op
Substitution $\simeq n^2$ op
$\Big\}$ $LU \simeq n^3/3$ op.

utilisat° : · resolut° systeme $Ax = b$
· calcul inverse (n^3 opérat°)
· calcul de det.

calcul pratif (annexe).

b - Cholesky p424 All

Cadre $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Thm : $\exists !$ B triang inferieure tq elts diag soit ≥ 0 et on a $A = BB^*$

opérations

Factorisat° $\simeq n^3/6$ op.
Substitution $\simeq n^2$ op
$\Big\}$ total $\simeq n^3/6$ op

rmq : c'est $2\times$ plus rapide + Gauss pr $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Calcul pratif (annexe à mettre).

III - METHODES ITERATIVES cf Leçon 233

1. Pcipe méthode itératives

Allaire p130
Ciar p96

DEV ‖ $\rho(M^{-1}N) < 1$ ssi methode converge

2. Etude de méthodes classiques.

3. Gdt à pas optimal

Algo gdt pas optimal. ‖ DEV.