161 — Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimension 2 et 3.

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien. Soit E un espace affine euclidien de direction $\vec{E}$ et de dimension $n \geq 1$.

Def 1 : Une application $f : \vec{E} \to \vec{E}$ est une isométrie vectorielle si $\forall x, y \in \vec{E}$ $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. On note $O(\vec{E})$ l'ensemble de ces applications.

I. PREMIERS PAS AVEC LES ISOMÉTRIES AFFINES.

1. Lien entre les isométries affines et vectorielles

Def 2 = Une application $f : E \to E$ est une isométrie affine si $\forall M, N \in E$, $\|f(M)f(N)\| = \|MN\|$.
On note $Is(E)$ l'ensemble des isométries affines de E.

Ex 3 =
- Les translations sont des isométries.
- En général, les homothéties ne sont pas des isométries.

Thm 4 = $f : E \to E$ est une isométrie ssi elle est affine de partie linéaire une isométrie vectorielle.

Ex 5 = Une symétrie affine orthogonale est une isométrie affine.

Rq 6 = En particulier, une isométrie est bijective.
$Is(E)$ est un sous groupe du groupe affine $(GA(E), \circ)$

Def 7 : On appelle groupe des déplacements, noté $Is^+(E)$, le ss groupe formé des isométries de partie linéaire une applicat orthogonale positive.
L'ensemble des antidéplacements est $Is^-(E) = Is(E) \setminus Is^+(E)$

Prop 8 : On note $Is_O(E) = \{ f \in Is(E),\ f(O) = O \}$, $O \in E$.
C'est un sous groupe de $Is(E)$ et l'application
$$\mathcal{L} : Is_O(E) \longrightarrow O(\vec{E}), \quad f \longmapsto \mathcal{L}(f)$$
est un isomorphisme de gpes.

2. Théorèmes fondamentaux.

Prop 9 = Soit $O \in E$. Toute isométrie f s'écrit de façon unique $f = t_{\vec{u}} \circ g$ où $g \in Is_O(E)$ et $t_{\vec{u}}$ est une translation.

Thm 10 = Toute isométrie affine f s'écrit de façon unique $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{L}(f) - id)$ et où $g \in Is(E)$ possède au moins un point fixe.

Coro 11 = Si $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}(f) - id) = \{\vec{0}\}$ alors f admet un unique point invariant.

Thm 12 = Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de E. Soit $(B_0, \dots, B_n)$ des points de E tels que $\|B_iB_j\| = \|A_iA_j\|$ pour tout i, j. Alors il existe une unique isométrie transformant $A_0, \dots, A_n$ en $(B_0, \dots, B_n)$. De plus $(B_0, \dots, B_n)$ est un repère affine de E.

Def 13 = Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits isométriques s'il existe $f \in Is(E)$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Appli 14 = Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques ssi $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$.

II. ETUDE DE $O(\vec{E})$.

1. Réduction.

Prop 15 = Les matrices orthogonales de taille 2 sont de la forme
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Thm 16 = Soit $u \in O(\vec{E})$ alors il existe une b.o.n dans laquelle la matrice de u est de la forme
$$\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

2. Générateurs.

Def 17 = Une reflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.
- Un retournement est une symétrie orthogonale par rapport à un sev de dim $n-2$.

Thm 18 = Les reflexions engendrent $O(\vec{E})$. De plus, tout application orthogonale de $\vec{E}$ s'écrit comme produit d'au plus n reflexions. $(n \geq 2)$

Coro 19 = Toute isométrie affine de E est le produit d'au plus $n+1$ reflexions. $(n \geq 2)$

Thm 20 = Si $n \geq 3$, les retournements engendrent $SO(\vec{E})$.
De plus, toute application orthogonale positive de $\vec{E}$ s'écrit comme produit d'au plus n retournements.

Coro 21 = Si $n \geq 3$, tout déplacement de E est le produit d'au plus $n+1$ retournements.

2. Propriétés topologiques.

On identifie $O(\vec{E})$ à $O_n(\mathbb{R})$

Prop 22 = $O_n(\mathbb{R})$ est compact, non connexe.

App 23 = Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{+}(\mathbb{R})$ telles que $M = OS$.

Prop 24 = $SO_n(\mathbb{R})$ est compact, connexe.

App 25 = $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.] Developpement n°1.

III. CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DU PLAN ET DE L'ESPACE.

1. En dimension 2. n = 2

Def 26 = On appelle réflexion glissée la composée $t_{\vec{u}} \circ S_D$ d'une translation et d'une reflexion par rapport à une droite D.

Isométrie vectorielle	Isométrie affine	Points invariants.
Identite $Id_{\vec{E}}$	Translation $t_{\vec{u}}$	aucun point invariant si $\vec{u} \neq \vec{0}$. Sinon c'est Id_E donc E tout entier
Réflexion $S_{\vec{D}}$	Réflexion glissée $t_{\vec{u}} \circ S_D$	• si $\vec{u}$ non nul, aucun point invariant • si $\vec{u} = \vec{0}$, reflexion par rapport à la droite D. L'ensemble des points invariants est D.
Rotation vectorielle d'angle θ.	Rotation affine de centre O et d'angle θ	Un seul point invariant = le centre de la rotation si $\theta \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

cf annexe

2. En dimension 3: n = 3

Def 27 =
- Une reflexion glissée est la composée $t_{\vec{u}} \circ S_P$ d'une translation et d'une reflexion par rapport à un plan P.
- Un vissage est la composée $t_{\vec{u}} \circ r_D$ d'une translation et d'une rotation affine d'axe D.
- Une symétrie rotation $r_D \circ S_P$ est la composée d'une rotation d'axe D et d'une reflexion par rapport à un plan P. avec D orthogonale à P.

Isométrie vectorielle	Isométrie affine	Points invariants
Identité $Id_{\vec{E}}$	Translation $t_{\vec{u}}$	• si $\vec{u} \neq \vec{0}$ aucun point invariant • si $\vec{u} = \vec{0}$, Id_E donc E tout entier
Réflexion $S_{\vec{P}}$ par rapport à un plan $\vec{P}$	Réflexion glissée $t_{\vec{u}} \circ S_P$	• si $\vec{u} \neq \vec{0}$, aucun point invariant • si $\vec{u} = \vec{0}$, reflexion par rapport à un plan P L'ensemble des points invariants est P.
Rotation d'axe $\vec{D}$ et d'angle θ	Vissage $t_{\vec{u}} \circ r_D$	• si $\vec{u} \neq \vec{0}$, aucun point invariant. • si $\vec{u} = \vec{0}$, rotation d'axe D, l'ensemble des points invariants est D
Symétrie-rotation vectorielle. $r_{\vec{D}} \circ S_{\vec{P}}$ avec $\vec{D}$ orthogonale à $\vec{P}$	Symétrie-rotation affine $r_D \circ S_P$ avec D orthogonale à P	Un seul point invariant = l'intersection de P et de D.

cf annexe.

Maintenant n ne désigne plus la dimension de E.

IV ISOMÉTRIES CONSERVANT UNE PARTIE

Def 28 : Si P est une partie de E, on note $Is(P)$ (respectivement $Is^+(P)$, $Is^-(P)$), l'ensemble des isométries affines (resp. déplacements, antidéplacements) de E qui vérifient $f(P)=P$.

Thm 29 : • $(Is(P),\circ)$ est un groupe et $Is^+(P)$ est un sous-groupe de $Is(P)$.

• Si $s\in Is^-(P)$, $\begin{array}{ccc} Is^+(P) & \longrightarrow & Is^-(P) \\ f & \longmapsto & s\circ f \end{array}$ est une bijection.

Thm 31 : Toute isométrie laissant une partie finie $P=\{A_0,\dots,A_{n-1}\}$ globalement invariante laisse fixe l'isobarycentre O des points $A_0,\dots,A_{n-1}$.

Conséquence 30 : Si $Is^-(P)\neq\emptyset$, $Is(P)=Is^+(P)\cup(s\,Is^+(P))$ et $|Is(P)|\equiv 0\,[2]$. Sinon $Is(P)=Is^+(P)$.

1- En dimension 2 : polygones réguliers.

Soient $A_0,\dots,A_{n-1}$, n points du plan distincts. On note P le polygone de sommets $A_0,\dots,A_{n-1}$ dans cet ordre.

Def 32 : P est un polygone régulier à n sommets s'il existe une rotation r telle que $r(A_k)=A_{k+1}$ pour tout k.

Ex 33 : Le polygone dont les n sommets sont formés par les affixes des racines $n$èmes de l'unité. $\omega_k=e^{\frac{2i\pi k}{n}}$

On note $P_n=\{A_0,\dots,A_{n-1}\}$ un polygone régulier à n sommets.

Prop 34 : $Is^+(P_n)=\{Id, r,\dots,r^{n-1}\}$ est le groupe cyclique d'ordre n engendré par la rotation r.

Coro 35 : $Is^-(P_n)=\{s, rs,\dots, r^{n-1}s\}$ où s est la symétrie d'axe OA_0.

Def 36 : $Is(P_n)$ est le groupe diédral d'indice n, noté aussi D_n.

Ex 37 : Si T désigne un triangle équilatéral, on a $Is(T)\simeq\mathfrak{S}_3$.

2- En dimension 3 : le tétraèdre et le cube.

On note T_4 un tétraèdre régulier.

Prop 38 : Les groupes d'isométries de T_4 sont $Is(T_4)\simeq\mathfrak{S}_4$ et $Is^+(T_4)\simeq\mathfrak{A}_4$.

On note C_6 un cube régulier.

Prop 39 : Les groupes d'isométries de C_6 sont $Is^+(C_6)\simeq\mathfrak{S}_4$ et $Is(C_6)\simeq\mathfrak{S}_4\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Développement n°2

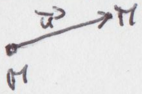
App 40 : Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

Mercier. • Cours de géométrie
• Fondamentaux de géométrie pour les concours

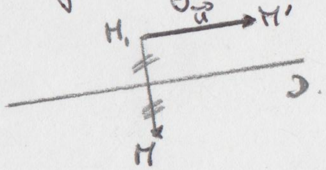
H2G2

Isométries affines du plan :

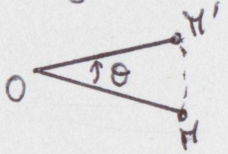
× Translation $t_{\vec{u}}$:



× Réflexion glissée $t_{\vec{u}} \circ S_D$:

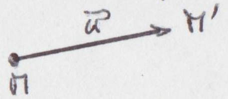


× Rotation affine de centre O et d'angle θ :

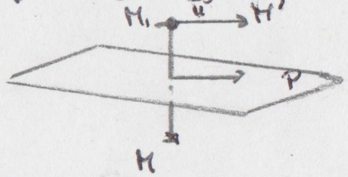


Isométries affines de l'espace :

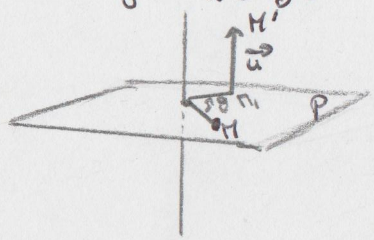
× Translation $t_{\vec{u}}$:



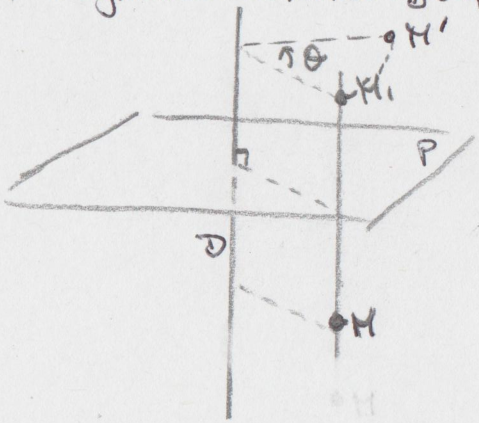
× Réflexion glissée $t_{\vec{u}} \circ S_P$:



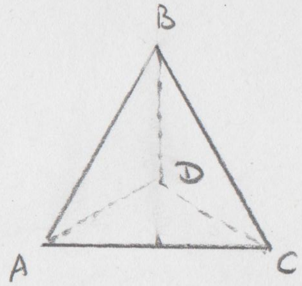
× Vissage $t_{\vec{u}} \circ r_D$:



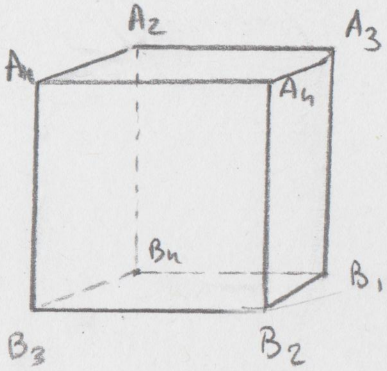
× Symétrie-rotation $r_D \circ S_P$.



T_4 :



C_6



Leçon 161 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimension 2 et 3

Développements :

Simplicité de SO(3), isométries du tétraèdre et du cube

Bibliographie :

Mercier Cours de Géométrie (M), Fondamentaux de géométrie pour les concours, H2G2

Plan

(On suppose connu les premières généralités sur $O(\overrightarrow{E})$, les isométries vectorielles) Soit $\overrightarrow{E}$ un espace euclidien. Soit E un espace affine euclidien de dimension n et de direction $\overrightarrow{E}$.

Définition 1 (M p. 139). $O(\overrightarrow{E})$

1 Premier pas avec les isométries affines

1.1 Définitions

Définition 2 (Mer p. 247). On appelle isométrie de E toute application f de E dans E qui conserve les distances, c'est à dire telle que $f(M)f(N) = MN$ pour tous points M et N de E. On note $Is(E)$ l'ensemble des isométries affines de E.

Exemple 3 (Mer p.247). Les translations

Théorème 4 (Mer p.247). *Une application est une isométrie ssi elle est affine de partie linéaire une application orthogonale.*

Exemple 5 (Mer p.247). Symétrie orthogonale affine

Remarque 6 (Mer p.248). D'après ce théorème, tout isométrie de $\overrightarrow{E}$ est bijective. $Is(E)$ est un sous-groupe du groupe affine $(GA(E),\circ)$ (groupe des applications affines bijectives de E dans E)

Définition 7 (Mer p.248). Groupe des déplacements $Is^+(E)$ et ensemble des antidéplacements.

Proposition 8 (Mer p.248). *Isomorphisme de groupes entre $Is_O(E)$, les isométries laissant stable le point O et $O(\overrightarrow{E})$.*

Ainsi la structure de $Is_O(E)$ est identique à celle du groupe $O(\overrightarrow{E})$ Dans le cas général, on se ramène par translation au cas où f possède au moins un point invariant

Proposition 9 (Mer p.248). *Soit O un point de E, toute isométrie f s'écrit de façon unique $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ ou $g \in Is_O(E)$ et $t_{\overrightarrow{u}}$ est une translation.*

1.2 Théorèmes fondamentaux

Amélioration de la prop précédente :

Théorème 10 (Mer p.249). *[Forme canonique d'une isométrie] Toute isométrie affine s'écrit de façon unique $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{u}}$, où $\overleftrightarrow{u} \in InvL(f)$ et où g est une isométrie qui possède au moins un point fixe.*

Corollaire 11 (Mer p.250). *L'ens des points où l'appli.... atteint sa borne inférieure*

Application 12 (Mer p.250). Caractérisation des translations

Corollaire 13 (Mer p.251). *Le centre de $Is(\overrightarrow{E})$ est réduit à $\{Id\}$.*

Théorème 14 (Mer p. 254). *Unique isométrie transformant un repère affine en une $(n+1)$ liste de points.*

Application 15 (Mer p. 256). Triangles isométriques

2 Etude de $O(E)$

(Pour abaisser la dimension de l'espace dans certains raisonnements. Cela servira en particulier à expliciter toutes les applications orthogonales d'un espace de dim quelconque :)

Proposition 16 (M p. 140). *Soit F un sev de E. Si F est invariant par $u \in O(E)$, $F^\perp$ l'est aussi.*
+ recollement d'applications orthogonales.

2.1 Réduction

Théorème 17 (M p. 150). *Réduction d'un endomorphisme orthogonal*

2.2 Générateurs

Définition 18 (M p.128+141). réflexion, retournement

Théorème 19 (M p.144). *$O(E)$ engendré par au plus n réflexions.*

Corollaire 20 (M p.261). *$Is(\overrightarrow{E})$ au plus $n+1$ réflexions*

Théorème 21 (M p.144). *$SO(E)$ engendré par au plus n retournements.*

Corollaire 22 (M p.261). *$Is^+(\overrightarrow{E})$ au plus $n+1$ retournements*

Application 23 (FGN Al 3). Simplicité de $SO(3)$

2.3 Propriétés topologiques

Voir H2G2 En choisissant une bon de E on peut identifier $O(\overrightarrow{E})$ à $O_n(\mathbb{R})$

Proposition 24. *$O_n(\mathbb{R})$ est compact*

Proposition 25 (H2G2 p. 202). *Décomposition polaire*

Corollaire 26 (H2G2 p. 205). *Maximalité de O_n*

Application 27. Points extrémaux

3 Classification des isométries du plan et de l'espace

3.1 Dimension 2 : plan

Réécriture pour la dimension 2 de ce qu'on a vu dans le cas général :

Théorème 28 (M p. 142). *Ecriture matricielle des applications orthogonales de taille 2*

Corollaire 29 (M p.143). *Tableau : Classification de $O(2)$ en fonction de la dimension de l'espace des vecteurs invariants*

+mettre les définitions (réflexion glissée) [Mer p.252] +tableau du petit mercier+ donner des exemples numériques

3.2 Dimension 3 : espace

Réécriture pour la dimension 3 de ce qu'on a vu dans le cas général :

Théorème 30 (M p. 146). *Ecriture matricielle des applications orthogonales de taille 3*

Corollaire 31 (M p.148). *Tableau : Classification de $O(3)$ en fonction de la dimension de l'espace des vecteurs invariants*

+ mettre les définitions (vissage, symétrie rotation, etc) [Mer p.252] +tableau du petit mercier+ donner des exemples numériques

4 Isométries conservant une partie

Si P est une partie de E, on note $Is(P)$ les isométries affines de E qui laissent P globalement, invariante.

Proposition 32 (Mer p. 267). *$Is(P)$ est un groupe, $Is^+(P)$ en est un sous groupe. Bijection $Is^-(P) = sIs^+(P)$*

(Ainsi, il suffit de trouver l'ensemble $Is^+(P)$ et un seul antidéplacement (s'il existe) conservant P pour déterminer entièrement le groupe $Is(P)$.)

Théorème 33 (Mer p. 268). *Toute isométrie laissant une partie finie $P = \{A_0, \cdots, A_{n-1}\}$ globalement invariante laisse fixe l'isobarycentre O des points $A_0, \cdots, A_{n-1}$.*

(Lorsque P est fini on ne recherche donc que les isométries qui fixent l'isobarycentre de P) Ces deux théorèmes permettent de déterminer les groupes d'isométries laissant stable une partie.

4.1 Conservant un polygone régulier

Théorème 34 (Mer p. 276). *Equivalence inscrit dans un cercle et rotation*

Définition 35 (Mer p. 276). Polygone régulier, convexe

Théorème 36 (Mer p. 278). *$Is^+(P_n)$*

Théorème 37 (Mer p. 278). *Réflexions et donnée de $Is^-(P_n)$*

Définition 38 (Mer p. 280). groupe diédral d'indice n

Théorème 39 (Mer p. 280). *groupe fini d'ordre 2n et générateurs*

Exemple 40 (Mer p.281). Triangle équilatéral

4.2 En dim 3 : Cube et tétraèdre

Groupe du cube [Mer p. 287] Groupe du tétraèdre [Mer p. 291]