

Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Développements :

Réduction des endomorphismes normaux, $SO(3)$ simple, Homéo de l'expo

Bibliographie :

Mercier cours de géométrie, Grifone, Gourdon alg et ana ou Rouvière, FGN A1 3, H2G2

Notes

Plan librement inspiré de celui présenté par Mégane Bournissou et Jérémy Martin.

Plan

1 Adjoint et endomorphismes normaux

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1 (Mer p.132). Adjoint d'un endomorphisme

Exemple 2.

Proposition 3 (Mer p.132). *Matrice de l'adjoint*

Proposition 4 (Mer p.133-4). *Propriétés*

Proposition 5 (Mer p.133). *Stabilité de se*

1.2 Réduction des endomorphismes normaux

[Gou Alg]

Définition 6. Endomorphisme normal

Proposition 7. u normal ssi $norm(u) = norm(u^*)$

Proposition 8. *Représentation matricielle*

Exemple 9.

Proposition 10. *Stabilité de se*

Proposition 11. *Réduction en dim 2*

Théorème 12. *Réduction des endo normaux*

2 Endomorphismes orthogonaux

[Mer p.137]

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 13. Endomorphisme orthogonal

Proposition 14. *Toutes les équivalences*

Remarque 15. Appli qui conserve la norme sans être linéaire

Proposition 16. *Représentation matricielle*

Définition 17. Matrice orthogonale

Exemple 18 (Gri p.241).

Proposition 19. $Det(u) = \pm 1$

Définition 20. $SO(E)$

Contre-exemple 21.

Proposition 22. *Lien avec bon*

Proposition 23. *Se stable*

Exemple 24. Symétrie orthogonale

Exemple 25 (Mer p. 151). Ecriture réflexion par rapport à un hyperplan

Définition 26. retournement

2.2 Réduction des endomorphismes orthogonaux

Proposition 27 (Gri p.239). *Les valeurs propres sont ± 1*

Proposition 28. *Matrice orthogonales de taille 2*

Lemme 29. *Possède un se invariant de dim 1 ou 2*

Théorème 30. *Réduction*

Application 31. En dim 3

Exemple 32 (Gri p.245).

2.3 Générateurs

Proposition 33 (????). *Centres*

Théorème 34. *Générateurs de $O(E)$*

Corollaire 35. *Générateurs de $SO(E)$*

Application 36. *$SO(3)$ est simple*

3 Endomorphismes symétriques

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 37 (Mer p.132). *endo symétrique*

Exemple 38 (???).

Proposition 39 (Mer p.133). *Lien avec matrice dans bon*

Corollaire 40 (Gou p. 225). *Dimension de endo symé*

Définition 41 (Gou p. 225). *Endo positif et défini positif*

Exemple 42.

3.2 Réduction des endomorphismes symétriques

[Mer p.477]

Proposition 43. *$\forall p$ réelles*

Proposition 44. *Spectre pour vp défini positif*

Théorème 45. *Thm spectral*

Contre-exemple 46. *matrice symétrique complexe qui n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} .*

Application 47 (FGN p.165). *CNS défini positif avec le spectre*

Application 48. *Homéomorphisme de l'expo*

Application 49 (FGN p.173). *Racine carrée*

Application 50 (FGN +H2G2). *Décomposition polaire et csqes*

Proposition 51 (FGN). *Pseudo réduction simultanée*

Corollaire 52 (FGN). *Log concavité du déterminant*

Application 53 (FGN). *Ellipsoïde de John Loewner*

3.3 Optimisation

[Gou Ana ou Rouvière]

Proposition 54 (Mer p. 130). *Moindres carrés*

Proposition 55. *La hessienne est symétrique*

Proposition 56. *si f admet un minimum local alors point critique de hessienne positive + réciproque*

Contre-exemple 57.

Exemple 58.

Lemme 59. *Kantorovitch*

Proposition 60. *Gradient à pas optimal*