459. Formes linéaires et dualité en dim finie. Ex et appli.

Dang-Jack Mercier Dualité (DJM) 2° dvlpt = dual de $M_n(\mathbb{K})$ à disperser.

soit E un $\mathbb{K}$ ev de dim finie.

I - FORMES LINEAIRES ET HYPERPLANS

1. FORMES LINEAIRES DJM p 7-8 4.4 + RIESZ

DEF : Forme linéaire

EX La différentielle d'une appli $f : E \to \mathbb{K}$ en un point est une forme linéaire ∈.

PROP forme lin est nulle ou surjective.

DEF Dual

PROP E^* ev sur $\mathbb{K}$.

THM RIESZ ds le cas E est ~~préhilbertien~~ euclidien.

rmq : se généralise ds un Hilbert.

2. HYPERPLANS DJM chap 3

a- Def et prop.

DEF Hyperplan

PROP Hyperplan en dim finie = les sev de E de dim $n-1$ (où $n = \dim E$).

EX : droite = hyperplan de $\mathbb{R}^2$ ex maison
plan = hyperplan de $\mathbb{R}^3$

EX Dual de $M_n(\mathbb{K})$ + tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $Gl_n(\mathbb{K})$. || DEV.

THM H sev de E. On a EQU. thm 16
(i) H noyau d'une f.l non-nulle
(ii) $\exists D$ droite tq $E = H \oplus D$.

cor H hyperplan de E. Alors $E = H \oplus \mathrm{vect}(a)$ où $a \notin H$. thm 18.

THM : 2 formes lin definissent le m̃ hyperplan ssi elles sont proportionnelles thm 19

THM : si $H = \ker f$ f forme linéaire thm 21
H fermé ssi f est continue. dans E Hilbert Look cas $\dim E < +\infty$

b- Dilatations et transvections app Perrin

PROP

THM EQU sur les transvections

THM EQU sur les dilatations

Appli : Transvect° engendrent $SL(E)$
Transvect° + dilatation engendrent $GL(E)$.

II - DUAL ET BIDUAL

1. BASES DUALES DJM

a-DEF DJM 4.2

Thm : E^* est de dim finie et $\dim E = \dim E^*$. THM 3 p 8
DEF formes lin e_i^*, on a $(e_1^*, \dots e_n^*)$ base de E^*

DEF $(e_1^*, \dots e_n^*)$ base duale de $(e_1, \dots e_n)$. DEF 3 p 9

rmq $\varphi : \underset{E}{\sum_{i=1} x_i e_i} \longmapsto \underset{E^*}{\sum_{i=1} x_i e_i^*}$ isomorphisme p 9

THM on a $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$ et $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*$ THM 4 p 9.

b- Exemples et applications DJM 4.3 p 10-11-12

. Formule de Taylor pour les polynômes
. Interpolat° de Lagrange
. Simpson (si on veut!)

à disperser en ex et applis

c- Bases duales et hyperplan. DJM chap 7

besoin d'orthog-

THM $(H_i)_{1 \le i \le m}$ hyperplan dim $\bigcap_{i=1}^{m} H_i = n - \mathrm{rg}(f_1, \dots f_n)$
où $H_i = \ker f_i$ THM 41 preuve 2 p 43

coro ~~THM~~ $(H_i)_i$ et H hyperplans. $H = \ker f$ $H_i = \ker f_i$
$\bigcap_{i=1}^{m} H_i \subset H \iff \exists \lambda_i \quad f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$ THM 42 preuve 1.

(Pas besoin thm 43 car on est en dim finie ds la leçon ms le thm est vrai en dim infinie)

THM Equat° d'un hyperplan THM 44 p 51 dans I 2 a)

THM : $\sum_{i=1} a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i' x_i = 0$ sont des equat° d'un m̃ hyperplan ssi $(a_1, \dots a_n)$ et $(a_1', \dots a_n')$ proport. THM 45 p 51

2. BIDUAL et BASES ANTEDUALES DJM chap 6

DEF Bidual E^{**} DEF 12

THM : Pour tout $\varphi \in E^*$, et $x \in E$ on pose $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$.

$\Psi : E \longrightarrow E^{**}$, $x \longmapsto \hat{x}$ linéaire injective (de un isomorphisme car dim $E < \infty$). THM 34.

DEF : $\hat{x}$ = évaluat° en x.

THM Application qui à toute base de E associe sa duale est une biject° entre l'ens bases de E et E^*. (si E est de dim finie) THM 36

q besoin d'orthogonalité

DEF Base antéduale DEF 14

ex : base antéduale avec polyn de Lagrange (du II 1 b)

THM L'image d'une base e de E par Ψ (def en thm) coïncide avec la duale de e^* ie $\Psi(e) = (e^*)^*$. THM 38

III - ORTHOGONALITE DJM

DEF crochet de dualité DEF 4

THM : $\Psi : E^* \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, $(\varphi, x) \longmapsto \langle \varphi, x \rangle$ bilinéaire Thm 8

DEF $A^\perp$ pour $A \subset E$ et B° pour $B \subset E^*$ DEF 5

PROP $A^\perp$ et B° sont des sev de E^* et E THM 9

THM $E^\perp = \{0\}$ $(E^*)^\circ = \{0\}$. THM 10

DEF $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ orthogonaux si $\langle \varphi, x \rangle = 0$. $A \subset E$ et $B \subset E^*$ orthogonales. DEF 6

PROP : $A, B \subset E$
$A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$; $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$; $A \subset (A^\perp)^\circ$ THM 11

PROP : $A, B \subset E^*$
$A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$; $A^\circ = \mathrm{Vect}(A)^\circ$; $A \subset (A^\circ)^\perp$ THM 12

THM si F sev de E $F = (F^\perp)^\circ$ THM 13.

espace

THM Dimens° de l'orthogonale THM 37 p 43

THM : orthogonal $\perp$ de la somme, intersect° THM 14 ← ici app = le truc sur les hyperplans

rmq : aussi vrai en dimens° infinie

THM F sev de E^* on a $\Psi(F^\circ) = F^\perp$ où Ψ définie THM 39 p 45.

THM Eq cartésienne d'un sev THM 46

IV - APPLICATION TRANSPOSEE DJM chap 4.

1. DEF et PROP DJM p 29

DEF appli transpo DEF 8

DEF : transposition DEF 9

THM : Transposition lin injective. si dim $E < \infty$ alors c'est un isomorphisme thm 22.

THM : . ${}^t(v \circ u) = {}^tu \circ {}^tv$ thm 23
. ${}^t Id_E = Id_{E^*}$
. u bijective alors ${}^tu$ aussi $({}^tu)^{-1} = {}^t(u^{-1})$

THM . $\ker({}^tu) = \mathrm{Im}\, u^\perp$
. $\mathrm{Im}({}^tu) = \ker u^\perp$ ← besoin du $rg(u) = rg(M)$ et $rg({}^tu) = rg(u)$ Thm 24
. u surjective ssi ${}^tu$ injective

PROP F stable par u ssi $F^\perp$ stable par ${}^tu$. à savoir

THM : u rg fini ssi ${}^tu$ rg fini et $rg({}^tu) = rg(u)$
⚠ utilise des quotients !

2. Transposée d'une matrice DJM p 36

DEF : ${}^tM$ DEF 10

THM $M \longmapsto {}^tM$ isomorphisme. THM 27

THM Dans des bonnes bases $\mathrm{Mat}({}^tu, f^*, e^*) = {}^t\mathrm{Mat}(u, e, f)$ THM 28

THM ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$; $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ THM 29.

DEF Rang matrice DEF 11

THM rg indep des bases. THM 30

THM $rg({}^tM) = rg(M)$ c'est le rang vecteurs lignes / colonnes THM 31

⚠ $\mathcal{L}_B({}^t\varphi) = {}^t\mathcal{L}(\varphi)$ n° b.e.a.n

DEV || **Appli** : Décomposit° de Frobenius.