157

Endomorphismes trigonalisables
Endomorphismes nilpotents

OA Objectif agreg G = Gourdon Cog = Cognet Algèbre linéaire

soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif) et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, qu'on note n.

I - Endomorphismes trigonalisables

1. Définition et caractérisation Cog p310

DEF 1: • soit $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f soit triangulaire sup. On dit que la base B trigonalise f.
• soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si M est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Rmq 2 $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi sa matrice est trigo dans une base quelconque de E.

G p162 → p167

THM 3: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est trigo ssi le polynôme caract. de f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Cor 4 Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable et si F est un sev de E stable par F alors $f|_F$ est trigonalisable.

Cor 5 Si $\mathbb{K}$ algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

EX 6 Tout endomorphisme avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est trigonalisable.

App 7: On a alors $\det(\exp(M)) = \exp(Tr(M))$ pour $M \in M_n(\mathbb{R})$

THM 8 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a equivalence entre OA p166
(1) f est trigonalisable
(2) il existe un polynôme annulateur scindé de f.
(3) le polynôme minimal de f est scindé

EX 9 $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ trigonalisable G ex 1c) p167
car $\chi_M(X) = -(X-3)(X-2)^2$

PROP 9 Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ trigonalisable. On a
$Tr(M) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ et $\det(M) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$ où λ_j valeurs propres de M.

2. Trigo simultanée G p164 + OA ou Cog p310

PROP 10 Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$ avec $f \circ g = g \circ f$. Alors
(i) Tout sous espace propre de f est stable par g.
(ii) $\mathrm{Im}\, g$ est stable par f.

THM 11 Trigonalisation simultanée.
Si f et $g \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables avec $f \circ g = g \circ f$ alors il existe une base de trigonalisation commune de f et g. On dit que f et g sont cotrigonalisables.

Rmq 12 En terme matriciel Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ trigo et $AB = BA$ alors $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triang supérieures.

3. Un outil de réduction OA p163

THM 13 : LEMME DES NOYAUX
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = P_1 \dots P_r$ où P_i soit premiers entre eux 2 à 2. Alors on a
$\ker P(u) = \bigoplus_{j=1} \ker P_j(u)$

Cor 14 : Dans les conditions du thm 13 si P est un pol annulateur de u on a $E = \bigoplus_{j=1} \ker P_j(u)$

4. Prop topologiques OA p178

PROP 15 4.69
L'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes est dense dans l'ensemble des matrices trigo.

PROP 16 :
$T_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$

II - Endomorphismes nilpotents

1. Définitions et caractérisations OA 168-170

DEF 17 On note $\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{L}(E) : \exists n \in \mathbb{N}\ u^n = 0\}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathcal{L}(E)$

DEF 18 : L'indice de nilpotence de $u \in \mathcal{N}$ est la plus petite puissance nulle de u i.e c'est $\inf\{p \in \mathbb{N}\ u^p = 0\}$

Rmq 19 : Par Cayley-Hamilton, indice de nilpotence $\leq n$.

EX 20 $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$, $P \mapsto P'$ est nilpotent
où $\mathbb{K}_n[X]$ polynômes de degré $\leq n$.

THM 21 Caract de la nilpotence
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a equiv :
(1) u est nilpotent
(2) $\chi_u = (-1)^n X^n$ ou χ_u = pol caract de u

(3) $\exists p \in \mathbb{N}$: $\Pi_u = X^p$ où Π_u est le pol minimal de u.
Dans ce cas p = indice de nilpotence de u.
(4) u est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0.

rmq 22 : Si u est nilpotent, alors 0 est la seule valeur propre de u. La réciproque est fausse qd u pas trigo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ pas nilpotente et $\chi_A = -X(X^2+1)$.

(ici on travaille ds $M_3(\mathbb{R})$ donc ϕ trigonalisable ici)

OA p174

THM 23 Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est nulle. On a eq
$\left[Tr(u^k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}^* \iff u \text{ nilpotente} \right.$

App THM DE BURNSIDE.

DEF 24 Soit G un groupe. On dit que G est d'exposant fini si $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall g \in G \ g^N = e$

THM 25 DE BURNSIDE
Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. On a équivalence
(i) G est fini.
(ii) G est d'exposant fini.

DEV 1

2. Structure de $\mathcal{N}$

Si u est nilpotent alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ λu est nilpotent.

OA p168

Rmq 26. $\mathcal{N}$ n'est pas stable par addition

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{N}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{N}}$$ mais $A \notin \mathcal{N}$ car A est inversible

PROP 27 OA rmq 454 p 169
Si u et v sont nilpotents et u et v commutent alors u+v est nilpotente.

PROP 28
L'espace vectoriel engendré par $\mathcal{N}$ est le noyau de la trace
$Vect(\mathcal{N}) = \ker(Tr) = \{u \in \mathcal{L}(E) : Tr(u) = 0\}$

3. Généralisation : unipotent OA p174

DEF 29 : On note $\mathcal{U} = id + \mathcal{N} = \{u \in \mathcal{L}(E) : \exists n \in \mathcal{N}$ tq $u = n + id\}$

Les éléments de $\mathcal{U}$ sont appelés unipotent.

PROP 30 : Les caractérisations des unipotents sont analogues à celles données dans le thm 21 pour les nilpotents.

4. Généralisation Endo cycliques

PROP 31
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'indice q. Il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots u^{q-1}(x_0))$ est libre. Et elle forme donc une base de E.

DEF 32 :
On dit que u est cyclique si $\exists x_0 \in E$ tel que $(x_0, \dots u^{n-1}(x_0))$ forme une base de E

PROP 33
On a eq u est cyclique ssi il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est compagnon.

III - Applications à la réduction

1. Décomposition de Dunford

THM 34 Codiagonalisation OA p210
Soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E qui commutent 2 à 2 et qui sont diagonalisables alors il existe une base de E dans laquelle toutes les matrices des f_i sont diagonales

THM 35 DECOMPOSITION DE DUNFORD GOU p 193
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq le polynôme caractéristique de f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) de E tel que
- d diagonalisable et n nilpotente
- $f = d + n$
- d et n commutent

De plus, sous ces conditions d et n sont des poly en f.

DEV 2

EX 36 : La décomposition de Dunford de
$$\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} =$$

OA p164

Gour p196

OA
p200-201

OA 170

460 OA
172

Cex 37 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{diagonalisable}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotente}}$

mais ces 2 matrices ne commutent pas
ce n'est pas la décomposition de Dunford.

2. Noyaux itérés et réduction de Jordan

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

THM 38 On a

(1) $\forall i \in \mathbb{N}$ $\ker u^i$ est stable par u

(2) La suite $(\ker u^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclus°
La suite $\left(\dim(\ker(u^{i+1})) - \dim(\ker(u^i))\right)_i$ est décroissante et positive.

(3) si $\ker u^j = \ker u^{j+1}$ alors $\ker u^i = \ker u^j$ $\forall i \geq j$

DEF 39 $(\ker u^i)_i$ est la suite des noyaux itérés

PROP 40: Les s.e.v de E stable par u sont les $\ker u^i$ pour $i = 0, \dots n$ pour u nilpotent d'indice maxi

A partir de cela on peut en déduire une réduction pour les end nilpotent : Réduct de Jordan.

DEF 41 Blocs de Jordan

Un bloc de Jordan est une matrice de la forme
$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

Rmq 42 si $B = (e_1, \dots e_n)$ base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}(u, B) = J_n$ alors on connait les noyaux et images des u^i $i \in \mathbb{N}$: à savoir
$\ker(u^i) = \mathrm{vect}(e_1, \dots e_i)$ $\quad \mathrm{Im}(u^i) = \mathrm{vect}(e_1, \dots e_{n-i})$

THM 43 Reduction de Jordan ~~(Admis)~~ pour nilpotent

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Il existe $n_1 \geq n_2, \dots \geq n_p$ des entiers et une base B de E tel que
$\mathrm{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_p} \end{pmatrix}$ → prendre l'écriture du OS

De plus, les entiers $(n_i)_i$ sont uniques au sens où si $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_q$ des entiers et B' une base de E tel que $\mathrm{Mat}(u, B') = \begin{pmatrix} J_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_q} \end{pmatrix}$

alors $p = q$ et $m_i = n_i$ pour tout i

Application 64 La décomposition de Jordan donne beaucoup d'information sur l'endomorphisme.

→ L'indice de nilpotence de u est la taille du plus grand bloc de Jordan

→ La dimension du noyau = Nbre de blocs de Jordan.

OA
A3

Cor 44: Reduction de Jordan Thm 5 G 196

soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$: $\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$

Alors il existe une base B dans laquelle
$\mathrm{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}$ où $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & v_{i,\alpha_i - 1} \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$

$A_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{K})$ pour tout $1 \leq i \leq s$