Leçon 154 : Sous espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes en dimension finie. Exemples et applications.

Développements :

Réduction des endomorphismes normaux, Frobenius

Bibliographie :

FGN Alg 2, Gourdon Algèbre, FGN Alg 1, OA, H2G2 1 et 2(ou Ulmer), JDM Dualité, Cognet

Notes :

Merci à Jéremy Leborgne et à Bruno Arsac pour leurs vérifications.

Défense de plan :

Dans l'idéal, il faut partir de la problématique : les sous-espaces stables quels sont-ils ? Comment les trouver tous ? Quels sont les endomorphismes dont l'ensemble des sous-espaces stables vérifie telles propriétés ?... FGN Alg 1 p. 291 : Dans l'étude d'un endomorphisme u on essaye, autant que faire se peut, de découper l'espace en une somme directe de sous-espaces stables pour se ramener à l'étude (que l'on espère plus simple) des restrictions de u à ces sous-espaces. C'est typiquement l'objet de la réduction avec les sous-espaces propres ou les sous-espaces caractéristiques. Dans l'étude des représentations linéaires d'un groupe fini G, on rencontre la même démarche, qui conduit à la notion de représentations irréductibles.

Plan

1 Généralités sur les sous espaces stables

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 (OA p. 158)**.** On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Exemple 2 (OA p. 158)**.** $\ker u$ et Imu sont stables

Proposition 3 (OA p. 158)**.** *Sur $\mathbb{R}$ u a un plan ou une droite stable*

Proposition 4 (OA p. 159)**.** *Stabilité et commutation*

Corollaire 5 (OA p. 159)**.** $\ker P(u)$ *est stable par u*

Exemple 6 (OA p. 159)**.** Les sep et les sous espaces caractéristiques

Proposition 7 (OA p. 197)**.** *Lorsqu'un sep est de dimension ≥ 2, u admet une infinité de se stables, si $\mathbb{K}$ est infini.*

Exemple 8 (OA p. 196 exo 4.2 b)**.** Dénombrement de se stables

Proposition 9 (???)**.** *Une droite est stable par u ssi elle est engendrée par un vecteur propre de u.*

Corollaire 10 (???)**.** *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, u a toujours une droite stable*

1.2 Endomorphisme induit et bases adaptées

Définition 11 (OA p. 158)**.** endomorphisme induit

Proposition 12 (OA p. 158 + 162)**.** *Ecriture matricielle dans une base adaptée avec la stabilité + divisibilité des π_u et χ_u.*

Remarque 13. Diagonalisation et trigonalisation par blocs

Théorème 14 (OA p. 159)**.** *Lemme des noyaux*

Remarque 15 (OA p. 159). Intérêt des sous espaces caractéristiques

Proposition 16 (OA p. 164)**.** *Un sous-espace F de E est stable si, et seulement si son intersection avec chaque sous-espace caractéristique N_i est stable par u. Dans ces conditions, $F = \oplus(F \cap N_i)$.*

Contre-exemple 17 (OA p. 165)**.**

1.3 Dualité

JDM application transposée + stabilité (OA, Gou p.258 et 129 et ex 6.1 Cognet)

2 Sous espaces stables et endomorphismes, réduction

2.1 Ceux qui n'ont que $\{0\}$ et E : les endomorphismes simples

Définition 18 (FGN2 p. 151)**.** u est simple ssi χ_u est irréductible

Proposition 19 (FGN2 2.45 p. 152)**.** *u est simple ssi les seuls sous espaces stables sont $\{0\}$ et E.*

2.2 Les homothéties et les endomorphismes diagonalisables

Proposition 20 (FGN 1 ex 6.6 p. 269)**.** *Soit $k < n$, u homothétie ssi u qui stabilise tous les se de dim k*

Proposition 21 (FGN2 2.50)**.** *u diagonalisable ssi χ_u est scindé et tout se stable par u admet un supplémentaire stable par u*

Proposition 22 (Gou p. 164)**.** *u diagonalisable ssi χ_u est scindé et multiplicité algébriques et géométriques égales (ssi u laisse n droites indépendantes stables)*

Proposition 23 (Gou p. 164)**.** *Restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un se stable*

Théorème 24 (Gou p.166)**.** *Diagonalisation simultanée*

Application 25. Dunford

2.3 Endomorphismes ayant un nb fini de sous espaces stables : les endomorphismes cycliques

Définition 26 (H2G2 1 p. 149)**.** endomorphisme cyclique

Proposition 27 (H2G2 1 p. 151)**.** *u est cyclique ssi $\pi_u = \chi_u$ (ssi u n'a qu'un seul bloc de Jordan pour chaque valeur propre)*

Théorème 28 (FGN2 2.55 p.152)**.** *Si $\mathbb{K}$ est infini, u un endomorphisme de E. On a les équivalences entre : 1. u est cyclique*
2. u ne stabilise qu'un nb fini de sous espaces

blabla sur les endomorphismes cycliques : H2G2 1 p 151

Théorème 29. *Thm de Frobenius*

Corollaire 30. *Jordan*

Remarque 31. Cela donne une décomposition en somme directe de sous espaces stables indécomposables

2.3.1 Les endomorphismes indécomposables

[Cog p. 380]

Définition 32. u est indécomposable ssi E n'est pas la somme directe de sous espaces stables stricts

Proposition 33. *u est indécomposable ssi son polynôme minimal est la puissance d'un irréductible*

Rajouter lé décomposition en se indécomposables avec un exemple.

2.3.2 Cas particulier des nilpotents d'indice maximal

Proposition 34 (FGN2 p. 141)**.** *Soit u un endomorphisme nilpotent sur un corps infini. On a équivalence entre 1. u est nilpotent de rang $n-1$(n'a qu'un seul bloc de Jordan)*
2. Les seuls sous espaces stables par u sont les $\ker(u^k)$
3. u n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables

Exemple 35 (OA p. 196)**.** Dénombrement de se stables

2.4 Endomorphismes dont tout se stables admet un supplémentaire stable : les endomorphismes semi-simples

Définition 36 (FGN2 2.51 p. 145)**.** Endomorphisme semi-simple : pas de facteur carré dans π_u

Remarque 37 (OA p.160). Sur un corps algébriquement clos, semi-simple = diagonalisable

Proposition 38 (FGN2 2.51 p. 145 ou OA p.160)**.** *u semi simple ssi tout se stables par u admet un supplémentaire stable par u*

Proposition 39 (Gou pb 19 p. 224)**.** *semi simple sur $\mathbb{R}$ équivalent à diagonalisable sur $\mathbb{C}$*

2.5 Endomorphismes normaux

[Gou p. 258]

3 Représentations des groupes finis

[H2G2 2] Sous représentations, Maschke et Schur