Gou : Gourdon Algèbre
OA = Objectif agrég.
Méthodix = Méthodix algèbre, Merlin.
COG = Cognet, Algèbre linéaire.

153

Polynomes d'endomorphismes en dim < ∞ - Réduct° d'un endomorphisme en dim < ∞ - Applications

K un corps commutatif, E un K-ev de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$

I. POLYNOMES D'ENDOMORPHISME

1. L'algèbre $K[u]$. Gou + OA + (COG)

Gou p172 **Def 1** = Soit $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i \in K[X]$.
. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(u) = a_0 Id_E + a_1 u + \dots + a_p u^p \in \mathcal{L}(E)$
. Pour $A \in M_n(K)$, on note $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p \in M_n(K)$.

OA p161 **Def 2** = On définit $\varphi_u = K[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ morphisme de K algèbres.
$P \longmapsto P(u)$
L'image de φ_u, noté $K[u]$, est appelé algèbre des polynomes en u.

Gou p172 **Rq 3** = . Pour $P, Q \in K[X]$, on a $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$ d'où $K[u]$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
. $Ker(P(u))$ et $Im(P(u))$ sont stables par u.

COG p278 **Thm 4** Lemme des noyaux :
Gou p173 Si $P = P_1 \cdots P_k \in K[X]$, les polynômes P_i étant premiers entre eux deux à deux. Alors $Ker\, P(u) = Ker\, P_1(u) \oplus \dots \oplus Ker\, P_k(u)$

2. Le polynome minimal de u. OA + COG + Gou

OA p161 **Prop 5** = $Ker\, \varphi_u$ est un idéal de $K[X]$ non réduit à $\{0\}$, appelé idéal des polynomes annulateurs de u. Comme $K[X]$ est principal, il existe un unique polynôme unitaire qui engendre $Ker\, \varphi_u$.

Def 6 = On note ce polynôme Π_u, c'est le polynôme minimal de u.

Prop 7 = On a l'isomorphisme $K[u] \simeq K[X]/(\Pi_u)$. Et si $\Pi_u = P_1 \cdots P_r$ avec les P_i premiers entre eux deux à deux (pas supposés irréductibles), alors $K[u] \simeq K[X]/(P_1) \times \dots \times K[X]/(P_r)$

Ex 8 = . Soit p un projecteur alors $p^2 = p$ et donc $X(X+1)$ est le polynome minimal de p. On a donc $K[p] \simeq K[X]/(X) \times K[X]/(X-1)$
. symétrie : $X^2 - 1$
. nilpotent : X^k

COG p172 **Prop 9** = $K[u]$ est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\deg(\Pi_u)$ et la famille $(Id, u, \dots, u^{\deg(\Pi_u)-1})$ en est une base.

OA p161 **Prop 10** = Si F est un sev de E stable par u alors $\Pi_{u_{|F}} \mid \Pi_u$.

Prop 11 = Si $E = F_1 \oplus F_2$, où F_1 et F_2 sont des sev stables par u. Alors $\Pi_u = ppcm(\Pi_{u_{|F_1}}, \Pi_{u_{|F_2}})$

Gou p173 **Prop 12** : . Si $P \in K[X]$, $P(u) = 0$ alors si λ est valeur propre de u, $P(\lambda) = 0$.
Gou p174 . λ est vp de u ssi λ est racine de son polynôme minimal.

COG p272 **Rq 13** = On définit le polynome minimal d'une matrice $A \in M_n(K)$ comme le polynome minimal de n'importe quel endomorphisme de matrice A dans une base. Deux matrices semblables ont donc le même polynôme minimal.

C-ex 14 = La réciproque est fausse : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même polynôme minimal X^2 mais ne sont pas semblables car elles n'ont pas même rang

3. Le polynôme caractéristique de u COG (+ OA + Gou)

COG p284 **Def 15** = Pour $A \in M_n(K)$, on définit le polynome caractéristique de A, que l'on note χ_A, par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$

Prop 16 = Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. On définit alors le polynome caractéristique de u comme celui dans la matrice associée dans n'importe quelle base.

sans réf **C-ex 17** : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont m̃ polynome caractéristique X^2 mais ne sont pas semblables.

Prop 18 = . λ est vp de u ssi λ est racine de χ_u
. χ_A est unitaire de deg n. $\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$
où $b_{n-1} = -Tr(A)$ et $b_0 = (-1)^n \det A$.

OA p163 **Prop 19** = Cayley Hamilton : $\chi_u(u) = 0$

Cor 20 = $\Pi_u \mid \chi_u$ et $\deg \Pi_u < n = \deg \chi_u$.

COG p298 **Prop 21** = Π_A et χ_A ont les mêmes facteurs irréductibles dans $K[X]$

Gou p176 **Exemple 22** = . u est nilpotent ssi $\chi_u = X^n$

COG p287 **Prop 23** = Si F est un sev de E stable par u alors $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$.

p280 **App 24** = Si λ est vp de u et m_λ est la multiplicité de λ dans χ_u, alors $1 \le \dim(E_\lambda(u)) \le m_\lambda$ où $E_\lambda(u) = Ker(\lambda Id - u)$.

II POLYNOMES D'ENDOMORPHISME = UN OUTIL POUR LA RÉDUCTION

1. Application à la diagonalisation

OA p165 **Prop 25** : On a equivalence entre
. u est diagonalisable
. il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples
. Π_u est scindé à racines simples
. χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, la dimension des sous espace propre E_λ est égale à la multiplicité de λ dans χ_u.

Ex 26 : . si p est un projecteur, il est annulé par $X^2 - X$ qui est scindé à racines simples donc p est diagonalisable et $Sp(p) \subset \{0, 1\}$
. si s est une symetrie, s est annulée par $X^2 - 1$ qui est scindé à racines simples (si $car(K) \neq 2$) donc s est diagonalisable et $Sp(s) \subset \{-1, 1\}$. En part $A \mapsto {}^tA$ est diagonalisable

OA p166

GOU ex2 p176 **App 26** = Cas des corps finis = si $K = \mathbb{F}_q$, u est diagonalisable ssi $u^q = u$.

X-ENS Alg 2 p171 **App 27** = Thm de Burnside = Tout sg d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini

OA p166 **Cor 28** = Si F est un sev stable par u et si u est diagonalisable alors $u_{|F}$ l'est.

OA p167 **Prop 29** = Si u et v sont diagonalisables et commutent alors ils sont codiagonalisables } voir si utilise les poly

GOU ex2 p256 **Thm 30** = Réduction des endomorphismes normaux. DEV

Si u est normal ($uu^* = u^*u$) alors il existe une base B orthonormée de E tq $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \tau_1 & \\ 0 & & & & \ddots \ \tau_s \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

où E est un espace euclidien.

Appli 31: Thm spectral

2. Application à la trigonalisation. OA

OA p166 **Prop 32**. On a équivalence entre
- u est trigonalisable
- il existe un polynome annulateur scindé.
- χ_u est scindé
- π_u est scindé.

App 33 = Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

sans réf **Ex 34** = Si K est algébriquement clos, u est nilpotent ssi 0 est la seule vp de u.

OA p167 **Prop 35** = Si u et v sont trigonalisables et commutent alors ils sont cotrigonalisables

3. Décomposition de Dunford ⊕ poussée que trigonalisat°

GOU p191 **Thm 36** = Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_u est scindé sur K. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tq
- d est diagonalisable
- n est nilpotente
- $u = d + n$
- d et n commutent,

DEV

De plus d et n sont des polynômes en u.

Ex 37 = La décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C-ex 38 = Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on peut décomposer $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{diagonali}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilp.}}$ OA p164

mais ce n'est pas sa décomposition de Dunford car elles ne commutent pas.

4. Invariants de similitude

LOU p?

III APPLICATIONS.

1. Calcul de puissances. Methodix p88

a. avec la réduction

Si $A = PDP^{-1}$ i.e. A est diagonalisable alors $A^n = PD^nP^{-1}$
mais un endomorphisme n'est pas forcément diagonalisable, le calcul des vp et de P^{-1} est en général compliqué pour n grand.

→ mauvaise méthode en général

b. avec un polynôme annulateur.

Soit P un polynome annulateur de u. ~~Quitte à prendre π_u, on peut supposer deg P = n~~

On effectue la division euclidienne de X^k par P. $k \geq \deg P$.

$X^k = PQ + R$ avec $\deg R < \deg P$.

et alors $u^k = R(u)$.

Rq 39 = Si P est de degré ≥ 3, on n'a pas de méthode systématique pour trouver ses racines, mais c'est plus rapide qu'une récurrence linéaire.

Ex 40 = $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = X^2 - X - 2$ est un polynome annulateur de A.

$X^k = PQ_k + R_k$ avec $R_k = \alpha_k X + \beta_k$

d'où $A^k = \alpha_k A + \beta_k I_n$. Comme -1 et 2 sont vp, $(-1)^n = -\alpha_n + \beta_n$. $2^n = 2\alpha_n + \beta_n$

d'où $A^k = \dfrac{2^n + (-1)^{k+1}}{3} A + \dfrac{2^k + 2(-1)^k}{3} I_n$

Rq 41 = On peut aussi utiliser la décomposition de Dunford et le binôme de Newton.

2. Calcul de l'inverse Methodix p93.

Si A est inversible, on peut calculer son inverse à l'aide d'un polynôme annulateur.

Si $P = a_0 + \dots + a_{p-1}X^{p-1} + X^p$ annule A alors

$A(A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \dots + a_1 I_n) = -a_0 I_n$

Si $a_0 \neq 0$, $A\underbrace{\left(\dfrac{A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \dots + a_1 I_n}{-a_0}\right)}_{B} = I_n$

d'où A est inversible d'inverse B, par unicité.

Si $a_0 = 0$, on ne peut conclure.

Methodix p255

p256

OA p164

En général, on prend $P = \chi_A$ et donc $a_0 = \det(A) \neq 0$ si A est inversible.

Ex 42 : • $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est annulée par $X^2 - X - 2$.

donc $A^{-1} = \dfrac{A - I_n}{2}$ (si car$(K) \neq 2$) $= \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

• $A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ $A^2 = I_n$ donc $A = A^{-1}$.

Frobenius. + cogce = Jordan.

II ~~3~~. Réduction de ~~Jordan~~. Gou p195

Thm 43 . Si u est nilpotent alors il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & v_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & v_{n-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ avec $v_i \in \{0,1\}$.

Thm 44 . Si Π_u est scindé sur K : $\Pi_u = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ alors il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}$

où $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & v_{i,\alpha_i - 1} \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ avec $v_{i,j} \in \{0,1\}$.

Rq 45 = ~~Frobenius~~ ?

4. Exponentielle d'endomorphisme

Def 46 : On définit $\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$

Prop 47 : $\exp(u)$ est un polynôme en u.

Rq 48 : • $\exp(u)$ commute avec u.
• si u et v commutent alors $\exp(u)$ et $\exp(v)$ aussi.

Prop 49 : • $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$
• si A et B commutent, $\exp(A+B) = \exp A \exp B$.
• $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$

a. Calcul de l'exponentielle par Dunford.

Si $A = D + N$ avec $N^k = 0$, sa décomposition de Dunford, alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{N^j}{j!}$ où $D = P \Delta P^{-1}$

avec $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Rq 50 : Cette méthode n'est pas la plus efficace car il faut connaître la décomposition de Dunford de A, ce qui n'est pas évident en général.

b. Résolution d'équations différentielles

Methodix p264

Prop 51 : $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A\exp(tA)$.

App 52 . On cherche à résoudre le système d'équations différentielles
$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ Par thm de Cauchy Lipschitz, il y a unicité de la solution. donc $X(t) = \exp(tA)X_0$.

On est donc amené à trouver $\exp(tA)$.

5. Analyse spectrale de matrices stochastiques

2. Polynome caract
3. Polynome minimal
4. Lien entre χ et Π

+ voir ex 4.23 OA