152 - Déterminant. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

I Formes multilinéaires et déterminant

1) Formes multilinéaires [GOU A1] p 134-135

M p7

Def 1 : Soient $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$-ev. Soit $f : E_1 \times \dots \times E_p \longrightarrow F$.
f est dite **p-linéaire** si en tout point les p applications partielles sont linéaires. On note $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$.
- $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ est dite **alternée** si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que $\exists i \neq j$, $x_i = x_j$.
- $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ est dite **antisymétrique** si l'échange de deux vecteurs dans la suite $(x_1, \dots, x_p)$ donne à f des valeurs opposées.

Ex 2 : Si $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, alors $\varphi : E^p \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \varphi_1(x_1) \dots \varphi_p(x_p)$ $\in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$.

M p9 M p11 M p16

Rq 3 : f est antisymétrique ssi pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$.

Thm 4 : Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, alors $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ est antisymétrique ssi elle est alternée.
+ ~~nulle~~ sur famille liée.

Thm 5 : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E de dimension n est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1.
De plus, si $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})$ dans la base $\mathcal{B}$, les formes n-linéaires alternées sur E sont les applications de la forme $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

2) Déterminant d'une famille de vecteurs [GOU A1] p 135

M p14

Def 6 : On appelle **déterminant dans la base $\mathcal{B}$** l'unique forme n-linéaire alternée sur E prenant la valeur 1 sur la base $\mathcal{B}$: $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)}$.

Rq 7 : $\forall f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$, $f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
- En particulier si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, alors $\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

M p20

Thm 8 : Soit $x_1, \dots, x_n \in E$. Il y a équivalence entre :
(i) $(x_1, \dots, x_n)$ est liée
(ii) Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$
(iii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$

Ex 9 : $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$.
Rq : volume parallélépipède OA p184

App 10 : Supposons $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$. Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ alternée.
On note $f_u : (x_1, \dots, x_n) \in E^n \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$ pour $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors $f_u = \mathrm{tr}(u) f$.
[GOU A1] p 145

3) Déterminant d'un endomorphisme

M p18-19 [GOU A1] p136

Def/Prop 11 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On l'appelle **déterminant de f**, et on le note $\det f$.

Prop 12 :
- Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\det(f \circ g) = \det f \times \det g$ M p21-22
- $\det \mathrm{Id}_E = 1$
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $f \in GL(E) \iff \det f \neq 0$. Et alors $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$.

App 13 : $SL(E)$ est distingué dans $GL(E)$. M p24 [TAU]

4) Déterminant d'une matrice carrée [GOU A1] p 136

Def 14 : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant de A** le déterminant des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et on le note $\det A$: $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$.
On écrira $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ M p16

Ex 15 :
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. M p24
- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + bfg - gec - bdi - afh$. (Règle de Sarrus). M p25

Prop 16 :
- $\det A = \det {}^tA$.
- Si A est la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base, alors $\det f = \det A$. M p17

Rq 17 : On a donc $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
Ainsi, deux matrices semblables ont même déterminant. M p21-22

II Méthodes de calcul

1) Se ramener au cas triangulaire [GOU A1] p 136

Prop 18 : Si A est triangulaire, $\det A$ est le produit des éléments diagonaux de A.
De manière plus générale, si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, alors $\det M = \det A \times \det B$. M p29

M p31

Mp 80

Ex 19 : $\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$.

Prop 20 : • Si on effectue une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sur les colonnes de A, alors le déterminant de A est multiplié par $\varepsilon(\sigma)$.
• On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres.

On se ramène alors par l'algorithme de Gauss au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire : complexité en $O(n^3)$.

sans ref

Ex 21 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

2) Mineurs et cofacteurs [GOU AI] p 136 137

Mp 29

Def 22 : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
• Pour tout (i,j), on appelle mineur de l'élément a_{ij} le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.
Le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur de a_{ij}.
• On appelle mineurs principaux de A les déterminants $\Delta_k = \det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ pour $1 \leq k \leq n$.

Mp 27

Prop 23 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
• $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$: dvpt par rapport à la j-ème colonne.
• $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$: dvpt par rapport à la i-ème ligne.

sans ref

Ex 24 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$.

Mp 35

Def 25 : La matrice des cofacteurs $(A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée comatrice de A. On la note Com A.

Mp 36

Prop 26 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A\,{}^t\mathrm{Com}A = {}^t\mathrm{Com}A\, A = \det A \times I_n$.

Ex 27 : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

3) Déterminants particuliers

[GOU AI] p 137

• Déterminant de Vandermonde : Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.
$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

+ appli =

[GOU AI] p 143

• Déterminant de Cauchy : Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout (i,j).
$$\Delta_n = \left| \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \right| = \frac{\prod_{i<j} (a_j - a_i) \prod_{i<j} (b_j - b_i)}{\prod_{i,j} (a_i + b_i)}.$$

Mp 101

[GOU AI] p 146

• Déterminant circulant : Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = P(1) P(\omega) \cdots P(\omega^{n-1}) \quad \text{où } \begin{cases} P = a_1 + a_2 X + \dots + a_n X^{n-1} \\ \omega = e^{2i\pi/n} \end{cases}$$

Dans le cas où $a_i = \cos(i\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient
$$D = 2^{n-2} \sin^{n-2}\left(\frac{n\theta}{2}\right) \left[\sin^n\left(\frac{n+2}{2}\theta\right) - \sin^n\left(\frac{n\theta}{2}\right) \right].$$

Utilisati

III | Applications en algèbre et géométrie

1) Systèmes linéaires Mp 59

[GOU AI] p 138

Soit le système (S) : $AX = B$ avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.
Alors (S) admet une unique solution X ssi $\det A \neq 0$.
Les composantes x_i de X sont alors données par la formule de Cramer :
$$x_i = \frac{\det_{B_0}(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det A}$$
où B_0 est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et A_j est la j-ème colonne de A.

[GRI] p 141

Ex 28 : Soit le système $\begin{cases} 2x + y - z = \alpha \\ y + 3z = \beta \\ 2x + y + 2z = \gamma \end{cases}$. Il est de Cramer et l'unique solution est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $x = \frac{\alpha + 3\beta - 4\gamma}{-6}$, $y = \alpha + \beta - \gamma$, $z = -\frac{\alpha}{3}$.

[GOU AI] p 122

Mp 39

App 29 : Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le rang de A est le plus grand des ordres des matrices carrées de déterminant non nulle extraites de A.

2) Polynome caractéristique Mp 86

[GOU AI] p 162

Def 30 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynome caractéristique de A l'élément de $\mathbb{K}(X)$ défini par $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$. On a $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$.

Rq 31 : $\chi_A(0) = \det A$.

Prop 32 : λ est valeur propre de A ssi $\chi_A(\lambda) = 0$. Mp 87

[GOU AI] p 177

Prop 33 : $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$. $\chi_A(X) = (-1)^p (X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0)$.

DEV = suite de polygones -

Mp88 [GOU A1] p.177

App 34 : Théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_A(A)=0$.

3) Résultant

Szpirglas -

Mp68

Def 35 : Soient $P=a_nX^n+\dots+a_0$ et $Q=b_mX^m+\dots+b_0 \in \mathbb{K}[X]$.
Le résultant de P et Q, noté $Res(P,Q)$, est le déterminant :

$$Res(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & \cdots & b_{m-1} & b_m & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & b_0 & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{vmatrix}$$

Mp68 [GOU A1] p.208

Prop 36 : P et Q sont premiers entre eux ssi $Res(P,Q)\neq 0$.

App 37 : L'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes.

après la continuité du dét

[FGN A1] p.213

Thm 38 : (Thm de Kronecker)
Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ unitaire dont les racines complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1. Si $P(0)\neq 0$, alors les racines de P sont des racines de l'unité.

Cor 39 : Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ unitaire irréductible dont les racines sont de module inférieur à 1. Alors $P=X$ ou P est un polynôme cyclotomique.

4) Géométrie

[CA] p.154

• Interprétation géométrique du déterminant :
Soient $v_1,\dots,v_n\in\mathbb{K}^n$, on note $P(v_1,\dots,v_n)$ le parallélépipède engendré par les vecteurs $v_1,\dots,v_n$. Alors
$\lambda(P(v_1,\dots,v_n)) = |\det(v_1,\dots,v_n)|$ où λ est la mesure de Lebesgue.

[GOU A1] p.263

• **Def 40** : Soit E un espace préhilbertien (réel ou complexe). Soient $x_1,\dots,x_n\in E$. On appelle matrice de Gram la matrice $(\langle x_i,x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$. On appelle déterminant de Gram, noté $G(x_1,\dots,x_n)$, son déterminant.

Thm 41 : Soit E un espace préhilbertien et soit V un sous-espace de E muni d'une base $(v_1,\dots,v_n)$. Soit $x\in E$.
Alors $d(x,V)^2 = \dfrac{G(v_1,\dots,v_n,x)}{G(v_1,\dots,v_n)}$

Mp41 [GRI] p.132

• **Def 42** : Deux base B et B' d'un espace vectoriel de dimension finie ont même orientation si $\det P_{B\to B'}>0$, où $P_{B\to B'}$ est la matrice de passage de B à B'.

Rq 43 : Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Ex 44 : La base $\{(1,1,0,1),(0,0,1,0),(0,-1,1,0),(0,0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ a même orientation que la base canonique.

[CA] p.264

5) Théorie des nombres

Def 45 : Soit p un nombre premier, $p\geq 3$. Soit $x\in\mathbb{F}_p^*$. On définit le symbole de Legendre par : $\left(\frac{x}{p}\right)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{F}_p^{*2}\\ -1 & \text{sinon}\end{cases}$

Thm 46 : (Frobenius-Zolotarev)
Soit $p\geq 3$ premier. Soit V un $\mathbb{F}_p$-ev de dimension n finie.
Alors $\forall u\in GL(V)$, $\varepsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right)$ où ε est la signature.

IV | Applications en analyse

1) Régularité du déterminant

[GOU An] p.313 [OA] p.151

Prop 47 : Le déterminant d'une matrice est un polynôme en ses coefficients. Ainsi $M\mapsto\det M$ est de classe C^∞.

Prop 48 : La différentielle du déterminant est donnée par
$D\det_M(H) = (\det M)\,tr(M^{-1}H)$ pour $M,H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

DVL 2

App 49 : $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

App 50 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe, mais $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas.

2) Changement de variables

[GOU An] p.334

Def 51 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n):U\to\mathbb{R}^n$ de classe C^1.
Pour $x\in U$, le jacobien de φ en x est $J\varphi(x) = \det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leq i,j\leq n}$

Ex 52 : Jacobien du passage en coordonnées polaires :
Si $\varphi:(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times[0;2\pi]\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$, alors $J\varphi(r,\theta)=r$.

Thm 53 : Soit U un ensemble mesurable compact de $\mathbb{R}^n$, φ un C^1-difféomorphisme de $\mathring{U}$ sur $\varphi(\mathring{U})$ tel que $J(\varphi)$ se prolonge continument sur U.
Alors pour toute fonction $f:\varphi(U)\to\mathbb{R}$ continue,
$$\int_{\varphi(U)} f(v)\,dv = \int_U f(\varphi(u))\,|J\varphi(u)|\,du.$$

[FGN AN 3] p.229

App 54 : Ellipsoïde de John-Loewner :
Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

[GOU An] 358-359

Dvpt 2

[GOU An] p368

3) Equations différentielles

On considère $(H): Y' = A(t)Y$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur $\mathbb{K}^n$, où $A: I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.

Def 55 : Soient $V_1, \dots, V_n$ des solutions de (H). On appelle Wronskien de $V_1, \dots, V_n$ l'application $W: I \to \mathbb{K}$, $t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t))$.

Ex 57 : Le Wronskien de deux solutions u et v d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est $\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - u'v$.

Prop 58 : $(V_1, \dots, V_n)$ est une base de solutions de (H)
ssi $\exists\, t_0 \in I$, $W(t_0) \neq 0$
ssi $\forall t \in I$, $W(t) \neq 0$.

Prop 59 : On a : $\forall t \in I$, $W'(t) = \mathrm{tr}(A(t))\, W(t)$.
Donc $W(t) = W(a) \exp\left(-\int_a^t a_1(u)\, du\right)$, $a \in I$.

[GOU Al] : Gourdon, Algèbre, 2ème édition

[GOU An] : Gourdon, Analyse, 2ème édition

[OA] : Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation, 2ème édition

[GRI] : Grifone, Algèbre linéaire, 2ème édition

ou H = Mercier déterminants

Rq : on a défini dans $\mathbb{K}$ corps. Pour le poly caract, on peut voir dans $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$ corps et des coup, c'est correct

Plan de Laura Gay, remanié