Leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Développements :

Irréductibilité des polynômes cyclotomiques. Dénombrement des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

Bibliographie :

Perrin (P), Gozard (G), Calais Théorie de Galois (C), Ulmer (U)

Plan

Soient A un anneau intègre et $\mathbb{K}$ un corps

1 Polynômes irréductibles

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 (P p.46)**.** Polynôme irréductible

Proposition 2 (G p. 9)**.** *Polynômes irréductibles dans* $\mathbb{K}[X]$

Contre-exemple 3 (G p.9)**.** Un réductible sans racines

Contre-exemple 4 (G p.9)**.** Quand on n'est pas sur un corps

Proposition 5. *P irréductible ssi* (P) *maximal*

Contre-exemple 6. Faut être sur un corps : X^2+1 et $\mathbb{Z}[X]$.

1.2 Critères d'irréductibilité

Définition 7 (G p.10)**.** Contenu d'un polynôme

Proposition 8 (G p.10)**.** *Lemme de Gauss*

Théorème 9 (G p.10)**.** *Lien entre irréductibles de* $A[X]$ *et de* $Frac(A)[X]$.

Exemple 10. polynôme primitif irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ qui est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$

Contre-exemple 11. Polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ mais pas dans $\mathbb{Z}[X]$

Application 12. A factoriel implique $A[X]$ factoriel

Théorème 13 (G p.11)**.** *Critère d'Eisenstein*

Exemple 14 (G p.11)**.**

Théorème 15 (G p.12)**.** *Critère de réduction*

Exemple 16 (G p.12)**.**

1.3 Eléments algébriques et polynôme minimal

Définition 17 (C p.11)**.** Element algébrique, transcendant, polynôme minimal

Exemple 18.

2 Adjonction de racines

2.1 Extension de corps

Définition 19 (U p.163)**.** Extension de corps

Définition 20 (C p.4)**.** Sous-extension engendrée par une partie

Définition 21 (C p.4)**.** Extension simple

Proposition 22 (C p.4)**.** *Adjonctions successives*

Exemple 23 (C p.4)**.**

Définition 24 (C p.6)**.** degré d'une extension

Remarque 25 (C p. 6). $[K:k]=1$ ssi $k=K$

Théorème 26 (C p.6 bonne écriture :G p. 22)**.** *Base téléscopique*

Corollaire 27 (C p.6 bonne écriture :G p. 22)**.** *Multiplicité du degré*

Exemple 28.

Théorème 29 (G p.101 ou C p.46)**.** *(à voir..) Thm de l'élément primitif*

Théorème 30 (C p. 13)**.** *Equivalence algébrique,* $K[x]=K(x)$ *et degré*

2.2 Corps de rupture

Définition 31 (G p. 57)**.** corps de rupture

Théorème 32 (G p.57)**.** *existence et unicité du corps de rupture*

Proposition 33 (G p.58)**.** *degré du corps de rupture +base*

Exemple 34 (G p.58)**.** Corps à 4 éléments

Corollaire 35 (G p.58)**.** *Il existe une extension dans laquelle un polynôme donné possède une racine*

Proposition 36 (G p.59)**.** *Critère irréductibilité polynôme et la prop d'après*

2.3 Corps de décomposition

Définition 37 (G p. 59 ou C p.36)**.** corps de décomposition

Remarque 38. C'est une extension algébrique de degré fini

Exemple 39 (G p.60)**.**

Théorème 40 (G p.60)**.** *Existence et unicité + majoration du degré*

Exemple 41.

Proposition 42 (C p.37)**.** *Caractérisation avec les racines*

Exemple 43.

Application 44. Construction corps finis

3 Etude de certaines familles de polynômes irréductibles

3.1 Polynômes cyclotomiques

Définition 45 (G p.67)**.** (si la place) Racines primitives de l'unite

Proposition 46 (G p.67)**.** *(si la place) Ecriture des racines primitives*

Définition 47 (G p.67)**.** polynôme cyclotomique

Exemple 48.

Proposition 49 (G p.68)**.** *Unitaires, à coefficients entiers, irréductibles, degré*

Corollaire 50 (G p.69)**.** *Polynôme minimal et degré*

Application 51. Version faible du théorème de Dirichlet

3.2 Polynômes irréductibles sur un corps fini

Proposition 52 (G p.87)**.** $\mathbb{F}_{p^n} \cong \mathbb{F}_p[X]/(P)$

Corollaire 53 (G p.87)**.** *Corps de rupture et de décomposition*

Proposition 54 (G p.88)**.** *Facteurs irréductibles de* $X^{p^n} - X$

Corollaire 55 (G p.88)**.** *Nombre de polynômes irréductibles unitaires*

Exemple 56 (G p.89)**.**

Si on veut :

Théorème 57. *Berlekamp*