105

# Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications

U: Ulmer Theorie des groupes
Ca: Calais: Elements de theorie des groupes
G: Gourdon

E est un ensemble fini de dim n.

Generalités

**def 1:** On dit qu'un groupe G agit sur un ensemble E s'il existe $\varphi : G \to \mathfrak{S}(E)$ morphisme de groupes où $\mathfrak{S}(E)$ est l'ens des bijections de E ds E.

## I. GROUPE SYMETRIQUE

### 1- Permutations et cycles.

1- Permutatº et support

#### a- Permutations et supports

**Prop 2:** $\mathfrak{S}(E)$ muni de la composition est un groupe.

**Def 3:** $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$.

**Prop 4:** $\mathfrak{S}(E) \simeq \mathfrak{S}_n$ et $|\mathfrak{S}_n| = n!$ Le grpe des permutations symetriq d'ordre n

**Note 5:** On appelle $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n, on représente $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

**Rq 6:** En general $\mathfrak{S}_n$ n'est pas abélien:
ex $n=3$: $(1,3)(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq (1,2)(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**Prop 7:** $Z(\mathfrak{S}_n) = \begin{cases} \{1\} & n \geq 3 \\ \mathfrak{S}_n & n = 1,2. \end{cases}$

U 41 **Prop 8:** $\mathfrak{S}_n$ agit naturellement sur $\{1,\dots,n\}$ par permutation.
L'action est donnée par $\varphi : \mathfrak{S}_n \times [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$, $(\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$

U 31 **Thm 9 (Cayley):** Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous groupe de $\mathfrak{S}_n$.

U 42 **Def 10:** Le support de $\sigma$ est $supp(\sigma) = \{i \in [\![1,n]\!], \sigma(i) \neq i\}$.

**Ex 11:** $supp(e) = \emptyset$, $supp(\sigma) = supp(\sigma^{-1})$

**Prop 12:** Deux permutations à supports disjoints commutent.

Orbite et cycles

Ca 107 **Def 13:** à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe la relation d'equivalence
$i \mathcal{R}_\sigma k \iff \exists r \in \mathbb{Z} \ \sigma^r(i) = k$.
$\Omega_\sigma(i)$ la $\sigma$-orbite de i est la classe d'equivalence de i modulo $\mathcal{R}_\sigma$ i.e. $\Omega_\sigma(i) = \{\sigma^r(i), r \in \mathbb{Z}\}$.

**Ex 14:** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\Omega_\sigma(1) = \{1,3,5\}$
$\Omega_\sigma(2) = \{2\}$ l'orbite ponctuelle $\Omega_\sigma(4) = \{4,6\}$

#### b- Cycles

**Def 15:** $\sigma$ est un cycle de longueur r si il existe $i_1,\dots,i_r$ élts distincts de $[\![1,n]\!]$ tq $\sigma(j) = j$ si $j \notin \{i_1,\dots,i_r\}$, $\sigma(i_k) = i_{k+1}$ (où l'indice est pris modulo r). On le note $(i_1,\dots,i_r)$.
Un cycle de longueur 2 est appelé transposition.

**Rq 16** $supp(i_1,\dots,i_r) = \{i_1,\dots,i_r\}$

**Prop 17:** Un cycle de longueur r est d'ordre r. Les r-cycles sont conjugués ds $\mathfrak{S}_n$ Ca 108

**Rq 18:** L'inverse d'un r-cycle est un r-cycle: $(i_1,\dots,i_r)^{-1} = (i_r,\dots,i_1)$
Mais $\sigma^p$, $p \in [\![2, r-2]\!]$ n'est pas forcément un r-cycle
$\sigma = (1\,2\,3\,4)$, $\sigma^2 = (1\,3)(2\,4)$

### 2- Décomposition Générateurs

Ca 111

#### a) En cycles à supports disjoints.

**Thm 19:** Toute permutation $\sigma \neq e$ se décompose en produit de cycles à support disjoint. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

**Rq 19b:** Cela signifie que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par l'ens de ses cycles

**Ex 20:** Exemple d'une décomposition.

**Prop 21:** Dans une décomposition comme au thm 19, $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$, l'ordre de $\sigma$ est le ppcm des ordres de $\gamma_q$ $q \in \{1,\dots,k\}$.

**Ex 22:** $\sigma = (1,2,4)(3,5)$ est d'ordre $6 = ppcm(2,3)$.

#### b) En produit de transpositions.

**Thm 23:** Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de transpositions non permutables en général.

**Rq 24:** Décomposition non unique pour $n \geq 2$

**Ex 25:** Exemple d'une décomposition.

**Rq 26:** Cela signifie que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par l'ensemble de ses transpositions. Mais il existe des familles + restreintes de generateurs.

**Prop 27:** $\mathfrak{S}_n$ est engendré par l'ensemble des transpositions de la forme $(1,i)$, $2 \leq i \leq n$.

**Ex 28:** $(j,k) = (1,j)(1,k)(1,j)$

Prop 29 = $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions de la forme $(i, i+1)$, $1 \le i \le n-1$

Ex 30 = $(1\ 3\ 2) = (2\ 3)(1\ 2)$

### 3- Classes de conjugaison 445

Principe: Un conjugué de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est $\omega\sigma\omega^{-1}$ où $\omega \in \mathfrak{S}_n$. La conj correspond à une renumérotation différente.

Prop 31 = Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i_1, \dots, i_r \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(i_1 \dots i_r)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_r))$

~~Prop 32 = Deux cycles de même longueur sont conjugués.~~

Def 33 = Le type de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est $[l_1, \dots, l_m]$ liste des longueurs (triées par ordre croissant) des orbites de $[\![1, n]\!]$ sous la relation $R_\sigma$.

Ex 34: Dans $\mathfrak{S}_4$, le type de $\{id\}$ est $[1,1,1,1]$, 3-cycles $[1,3]$, transposition $[1,1,2]$, double transpositions $[2,2]$, 4-cycles $[4]$.

Prop 35 = Deux permutations sont conjuguées ssi elles ont même type.

Rq 36 = L'action de conjugaison donne une partition de $\mathfrak{S}_n$

Ex = $n=4$. On a 5 orbites de taille 1, 6, 3, 8, 6 dont les elts sont respectivement d'ordre 1, 2, 2, 3, 4.

Equation aux classes de $\mathfrak{S}_4$ = $|\mathfrak{S}_4| = 1+3+6+6+8$.

## II GROUPE ALTERNÉ et signature

### 1- Signature d'une permutation 448

Def 37: La signature de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est $\varepsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$

Ex 38 $\varepsilon((1,2)) = \frac{2-1}{1-2} = -1$.

Prop 39: * $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{1, -1\}$ est un morphisme de groupes
* si $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ où les $\tau_i$ sont des transpositions alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$
* si $\sigma$ est un $r$-cycle $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{r-1}$

Ex 40 = Calcul d'une signature.

Rq 41 = La signature est l'unique morphisme de groupe non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$.

### 2- Groupe alterné 451

Def 42 = Le noyau de $\varepsilon$ est un sous groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. C'est le groupe alterné. On le note $\mathcal{A}_n$.

Prop 43 = $[\mathfrak{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$ et $|\mathcal{A}_n| = n!/2$.

Ex. 44 = $\mathcal{A}_4$ contient 12 éléments.

Prop 45 = $n \geq 3$, $\mathcal{A}_n$ est engendré par les cycles de la forme $(1, i, j)$ $i \neq j$. En particulier, $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3 cycles

App 46 = $n \geq 2$ $D(\mathfrak{S}_n) = \mathcal{A}_n$. $\mathcal{A}_n$ est le seul sg d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$

Thm 47 = $\mathcal{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$

App 26 = Si $n \neq 6$, les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont les automorphismes intérieurs de $\mathfrak{S}_n$. $\boxed{\text{DEV}}$ à mettre avant

## III APPLICATIONS.

### 1- Déterminants G 134 ou Mercier déterminant

Def 49 p-linéaire, symétriq

Def 50 = $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ est alternée si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs sont égaux.
* f est antisymétrique si l'échange de deux vecteurs de $(x_1, \dots, x_p)$ donne à f des valeurs opposées.

Prop 51 = f est antisymétrique ssi $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p$ $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$

Prop 52 = Si $car(\mathbb{K}) \neq 2$, f est antisymétriq ssi elle est alternée.

Thm 53 = L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E $\mathbb{K}$-ev est un $\mathbb{K}$-ev de dim 1. De plus, il existe une unique forme n-linéaire alternée prenant la valeur 1 sur une base donnée $\mathcal{B}$ de E.

Def 54 = On appelle cette forme n-linéaire le déterminant dans la base $\mathcal{B}$.

A anneau intègre

Prop 55 = $\det_B(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}$.

G78 **2. Polynômes symétriques** (attent° aux questions dernière)

Def 56 = Un polynôme $P\in A[X_1,\dots,X_n]$ est dit symétriq si pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ $P(X_{\sigma(1)},\dots X_{\sigma(n)}) = P(X_1,\dots,X_n)$.

Ex 57 : Dans $\mathbb{R}[X,Y,Z]$ $P = XY+YZ+ZX$ est symétrique.

Rq 58 - Cela définit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur $A[X_1,\dots,X_n]$.

C-Ex 57b = $P = X^2Y+Y$ n'est pas symetrique dans $\mathbb{R}[X,Y]$.

Def 59 = $k\le n$, le polynôme symétrique élémentaire de degré $k$, noté $\sigma_k$, dans $A[X_1,\dots,X_n]$ est

$$\sigma_k = \sum_{\substack{H\subset[\![1,n]\!]\\ |H|=k}} \prod_{i\in H} X_i . \quad \text{Pour } k>n\ \sigma_k = 0.$$

Ex 60 = $n=1$ $\sigma_0 = 1$ $\sigma_1 = X_1$

$n\ge 2$ $\sigma_1 = \sum X_i$ $\sigma_2 = \sum_{i<j} X_i X_j$, $\sigma_n = \prod_{i=1}^n X_i$

Prop 61 = • $\prod_{i=1}^n (X-X_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_k(X_1,\dots,X_n) X^{n-k}$

• Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est un polynôme unitaire de degré $n$ et de racines $x_1,\dots,x_n$ alors $a_{n-k} = (-1)^k \sigma_k(x_1,\dots,x_n)$

Ex 62 = $P = X^3+4X^2+10X+42$. alors

$x_1+x_2+x_3 = -4$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = 10$.

$x_1x_2x_3 = -42$.

H2G2 p360
p363 pr DVLPT
ou
Alessandri
ou
Audin.

**3. Groupe d'isométries de polyèdres réguliers.**

+ table de $\mathfrak{S}_4$

à mettre peut être plutôt en applicat° de la prop qui suit.

Nouveau plan :

I. Généralités sur le groupe symétrique

1. Définitions et premières propriétés
2. Orbites et cycles
3. Générateurs
   a. Décomposition en cycles à support disjoint
   b. Décomposition en produit de transp.
4. Classes de conjugaison
   DVLPT : automorphismes de $\mathfrak{S}_n$

II Signature et groupe alterné

1. Signature d'une permutation
2. Noyau du morphisme signature : le gpe alterné

III Vers d'autres horizons

1. Formes n-linéaires et déterminant
2. Polynômes symétriques
3. Groupes d'isométries
   ↳ à éparpiller