Exemples de sg distingués et gpes quotients - Applications

103

Dans tout ce qui suit, G désigne un groupe (multiplicatif) et H un sous-groupe de G.

I. SOUS-GROUPES DISTINGUÉS ET GROUPES QUOTIENTS

1. Classes. Calais p71 à 77

Def 1: On associe à H deux relations d'équivalence $\mathcal{R}_H$ (resp ${}_H\mathcal{R}$) : $x\mathcal{R}_H y \iff xy^{-1}\in H$ (resp $x\,{}_H\mathcal{R}\,y \iff x^{-1}y\in H$).
On les appelle relation d'équivalence à droite (resp gauche) modulo H dans G.
Pour $x\in G$, les ensembles Hx et xH sont appelés classes à droite et à gauche modulo H. Ce sont les classes d'équivalences.

Rq 2: En choisissant une famille de représentants / ens des classes à gauche (resp à droite) forme une partition de G.

Def 3: On note $(G/H)_g$ (resp $(G/H)_d$) l'ensemble quotient de G par la relation ${}_H\mathcal{R}$ (resp $\mathcal{R}_H$).

Rq 2*: On a en général $Hx\neq xH$ donc $\mathcal{R}_H\neq{}_H\mathcal{R}$

Ex 4: $H=n\mathbb{Z}$ sg de $(\mathbb{Z},+)$. $x\mathcal{R}_H y \iff x\equiv y\,[n]$: $G/H=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\iff x\,{}_H\mathcal{R}\,y$

Prop 5: Les classes à droite ou à gauche modulo H sont équipotentes. Si H est fini, elles sont de m cardinal que H.

Thm 6 (de Lagrange). Si G est fini, l'ordre de H divise l'ordre de G.

Ex 7: Dans $\mathfrak{S}_3$, les seuls ordres possibles sont 1, 2, 3.

Prop 8: Les ensembles $(G/H)_g$ et $(G/H)_d$ sont équipotents.

Def 9: On appelle $[G:H]=|(G/H)_g|$ l'indice de H dans G.

Prop 10: Si G est fini, $o(G)=o(H)[G:H]$.

Ex 11: $[\mathbb{Z}:n\mathbb{Z}]=n$.

Thm 12 (Formule des indices): Si $[G:H]<\infty$, K sg de G, $H\subset G$.
Alors $[G:K]<\infty$ et $[G:H]=[G:K][K:H]$.

2. Lien entre sous groupes distingués et gpes quotients.

Def 13: H est distingué dans G si $\mathcal{R}_H={}_H\mathcal{R}$. On note $H\lhd G$.

Prop 14: $H\lhd G$ ssi $\forall g\in G\ \forall h\in H\ ghg^{-1}\in H$.

Thm 15: $H\lhd G$ ssi il existe G' un groupe, $f\in Hom(G,G')$ tq $H=\ker f$.

Ex 16:
- Tout sg d'un groupe abélien est distingué.
- $Z(G)\lhd G$
- $\mathfrak{A}_n\lhd\mathfrak{S}_n$
- $SL_n(\mathbb{R})\lhd GL_n(\mathbb{R})$.

Thm 17: Si $H\lhd G$, on peut munir G/H d'une loi de groupe faisant de la projection un morphisme de groupe.
Le groupe G/H est appelé groupe quotient de G par H.

Ex 18: • Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est un groupe appelé tore de dimension n.

Prop 16*: Si $[G:H]=2$ alors $H\lhd G$

Ex 16*: $Isom^+\lhd Isom$.

Prop 16*: Si G' est un groupe, $f\in Hom(G,G')$
$H\lhd G\Rightarrow f(H)\lhd f(G)$
$H'\lhd G'\Rightarrow f^{-1}(H')\lhd G$

Ex 16*:

Thm 19 (PU du gpe quotient). Si $\varphi\in Hom(G,G')$, $H\lhd G$.
Si $H\subset\ker\varphi$ alors il existe un unique morphisme $\bar\varphi: G/H\to G'$ tel que $\varphi=\bar\varphi\circ\pi$ où $\pi: G\to G/H$ est la projection canonique.

App 20: • $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\simeq\mathbb{S}^1$ via $\theta\mapsto e^{2i\pi\theta}$ • $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ via ε.
• $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K})\simeq\mathbb{K}^*$ via dét.
+ correspondance des sous gpes p165

II THEOREMES D'ISOMORPHISME · ~~Contella~~ p44 ou Ulmer p63

Thm 21 (1er thm d'isomorphisme) Tout $\varphi\in Hom(G,G')$ induit un isomorphisme de groupes $G/\ker\varphi\simeq Im\,\varphi$.

App 22: Un gpe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ex 23: $\mu_n=\{$racines n-ièmes de l'unité$\}\simeq\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Thm 24: (2ème thm d'isomorphisme) Soient $H\subset K\subset G$, $H\lhd G$ et $K\lhd G$. Alors $H\lhd K$, $K/H\lhd G/H$ et
$$(G/H)/(K/H)\simeq(G/H)$$

Ex 25: $n\in\mathbb{N}^*$ $d|n$. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

Si on a ex ou appli, mettre le 3e thm d'iso. Cp45 ou U p78

III GROUPES ET SOUS GROUPES REMARQUABLES.

1. Centre et groupe dérivé.

a. Centre. Calais p34

Def 26: Le centre de G est $Z(G)=\{x\in G,\ \forall g\in G\ gx=xg\}$
C'est un sous groupe de G.

Prop 27: • $Z(G)\lhd G$ • G est abélien ssi $G=Z(G)$.

Ex 28 : • $Z(\mathfrak{S}_n) = \{e\}$ pour $n \geq 3$. $\mathfrak{S}_n$ pour $n < 3$. • $Z(GL_n(\mathbb{R})) = \{\lambda Id, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

App 29 : $G/Z(G) \simeq Int(G)$. Trouver des ex, applis !

b- Sous groupe dérivé. Cortella p46 ou Ulmer

Def 30 : On appelle commutateur d'un groupe G tout élément de G de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$.

• Le sous groupe dérivé de G est le sg engendré par les commutateurs. On le note $D(G)$.

Rq 31 : $D(G)$ permet d'étudier le défaut de commutativité de G. Si G est abélien, $D(G) = \{e\}$.

Prop 32 : • $G/D(G)$ est abélien "quotienter" = "tuer des élts"
• $D(G) \lhd G$
• $D(G)$ est le plus petit sg distingué de G donnant un quotient abélien.

Ex 33 : • $D(\mathfrak{S}_3) = \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. vrai pr $n \geq 3$
• $D(GL_n(K)) = SL_n(K)$ pour $n \neq 2$ $K \neq \mathbb{F}_2$ → $PGL_n(K)$ espace projectif "parler des pts à l'∞"
• $D(GL_2(\mathbb{F}_2)) = \mathfrak{A}_3$

ici G est fini
p premier

→ 2- p-groupes et théorèmes de Sylow. Calais p207

Def 34 : On dit que G est un p-groupe si $o(G) = p^n$, p premier $n \in \mathbb{N}$.
• Si $o(G) < \infty$ et $p \mid o(G)$, H est un p-sg de G si $o(H) = p^r$, $r \in \mathbb{N}$.
• Si $o(G) = sp^n$ avec $p \nmid s$, tout sg d'ordre p^n de G est appelé p-sg de Sylow de G.

Thm 35 (1er thm de Sylow) Si $o(G) = sp^n$ avec p premier $p \nmid s$. Alors pour tout entier $1 \leq r \leq n$, il existe un sg de G d'ordre p^r.

App 36 : Thm de Cauchy : si $p \mid o(G)$ alors G a au moins un élément d'ordre p.

Thm 37 (2nd thm de Sylow) Si $p \mid o(G)$ alors $o(G) = sp^n$ $p \nmid s$
× tout p-sg de G est contenu dans un p sg de Sylow de G.
× les p-sg de Sylow de G sont conjugués
× le nb de p-sg de Sylow de G est congru à 1 $[p]$ et divise $o(G)$
$n_p \equiv 1\ [p]$ $n_p \mid S$.

Corollaire 38 : G a un unique p-sg de Sylow S ssi $S \lhd G$.

Ex 39 : $\langle \bar{2} \rangle$ est le seul 3 Sylow de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

App 40 : Un groupe d'ordre 42 n'est pas simple.

1. Groupes simples - Calais p138

Def 41 : G est dit simple si $G \neq \{e\}$ et n'a pas d'autres sg distingués que G et $\{e\}$.

Prop 42 : Les seuls gpes simples abéliens sont les groupes cycliques d'ordre premier.

Ex 43 : • $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est simple abélien, p premier
• $SO(3)$ est simple } DVLPT
• $\mathfrak{A}_n$ est simple, $n \geq 5$ ~~DVLPT~~

Prop 44 : Si $\varphi \in Hom(G, G')$ et G est simple alors φ est soit trivial soit injectif.

Ex 45 : Ulmer ou p75

4. Produit direct. Combes p25-26 et Ulmer p104

Def 46 : Soient G_1, G_2 deux groupes. On définit sur $G_1 \times G_2$ une loi de groupe en posant $(g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$. $(G_1 \times G_2, *)$ est un groupe appelé produit direct de G_1 et G_2.
Les applications de projection et d'inclusion sont des morphismes de groupes.

Prop 47 : Si H, K sont des sg de G avec $H \lhd G$, $K \lhd G$, $HK = G$ et $H \cap K = \{e\}$ alors $G \simeq H \times K$.

Rq 48 : Un produit direct n'est jamais simple.

Ex 49 : • Le groupe de Klein $V_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Prop 50 : Lemme chinois $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si $n \wedge m = 1$.

App 51 : Un groupe d'ordre 6 est soit commutatif et isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, soit isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ (Ulmer p79

Thm 52 (de structure) : Tout groupe abélien de type fini est isomorphe à un produit direct $\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$.
où $r, k \in \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{N}^*$ $m_i \mid m_{i+1}$ $i \in [\![1, k-1]\!]$.
Les entiers r, k, m_i sont déterminés de manière unique.

App 53 : Les structures possibles d'un gpe abélien d'ordre 60 Combes p68
ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ p168 Ulmer

5. Produit semi-direct Combes p47-45 et Ulmer.

Def 54 : Soient Q et N deux groupes, $\varphi : Q \to Aut(N)$ morphisme. Alors la loi $(n_1, q_1)(n_2, q_2) \mapsto (n_1 \varphi(q_1)(n_2), q_1 q_2)$ est une loi de groupe. Le groupe obtenu $N \rtimes_\varphi Q$ est appelé produit semi direct

Prop 55 : Soient H et K deux sg de G tq $H \triangleleft G$, $H \cap K = \{e\}$, $HK = G$. Alors $G \simeq H \rtimes_\varphi K$ où φ est l'act° par conjugaison.

Rq 56 : $H \rtimes_\varphi K \simeq H \times K$ ssi $\varphi : K \to Aut(H)$ est trivial.
ssi $K \triangleleft G$.

Ex 57 :
- $GL_n(K) \simeq SL_n(K) \rtimes K^\times$
- $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $n \geq 3$.

App 58 : Soient p, q premiers $p < q$. Les seuls gpes d'ordre pq sont $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ si $p \nmid q-1$ et $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si $p \mid q-1$. DVLP

App 59 : Groupes d'isométries du tetraèdre et du cube. DVLPT

IV SOUS GROUPES DISTINGUÉS ET REPRÉSENTATION.

à remplir
Table de caractères et sg distingués DVLPT
avec le blabla autour
selon la place

Caractérisat° du PD.