cf plan feuille suivante

102

Groupes des nb complexes de module 1. Sg des racines de l'unité. Exemples et Applications.

A.F = Arnaudiès-Fraysse Tome 1
Calais Théorie de Galois
U = Ulmer manuel Algèbre
(G: Gozard) Combes
FGN Alg 2
Audin Mercier
Fondamentaux géom pr concours

I. NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1 et exponentielle

1. Le cercle S^1 A.F p226

<u>Def 1</u> = On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. C'est le noyau du morphisme de groupes $|\cdot| : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $z \longmapsto |z|$. C'est donc un sous groupe de $\mathbb{C}^\times$.

<u>Rq 2</u> = $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.

<u>Prop 3</u> = L'application $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$, $(r,u) \longmapsto ru$ définit un isomorphisme.

2. Exponentielle et trigonométrie

<u>Def 4</u> = On définit l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

On note $\mathcal{E} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto \exp(it)$.

<u>Prop 5</u> = L'application $\mathcal{E}$ est un morphisme continu surjectif de $(\mathbb{R},+)$ sur $(\mathbb{U},\cdot)$, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$, où π est le double du plus petit réel $\alpha > 0$ tq $Re(\mathcal{E}(\alpha)) = 0$. On a donc $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}$.

<u>Cor 6</u> = $\mathbb{U}$ est un sg compact connexe de $\mathbb{C}$.

<u>Def 7</u> = On définit les fonctions cosinus et sinus par $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto Re(\mathcal{E}(x))$ et $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto Im(\mathcal{E}(x))$.

<u>Rq 8</u> = On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin x$.

<u>Prop 9</u> = Formule de De Moivre: $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}\ \exp(inx) = \cos(nx) + i\sin(nx)$.

<u>Prop 10</u> = Formules d'Euler: $\forall x \in \mathbb{R}\ \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

<u>App 11</u> = Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos\frac{n\theta}{2} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin(\theta/2)}$

<u>App 12</u> = linéarisation de $\cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

<u>App 13</u> = Polynômes de Tchebychev. ~~dem~~ ou A.F p229
Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\cos nx = T_n(\cos x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

<u>App 14</u> = Noyau de Dirichlet et de Fejér.

<u>Prop 15</u> = Soit $f : (\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{U},\cdot)$ un morphisme continu. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = \exp(i\alpha t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. T p139

3. Paramétrisation du cercle unité

<u>Thm 16</u> = Paramétrisation rationnelle de $\mathbb{U}$: ~~Audin p306~~
L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} \setminus \{(-1,0)\}$, $t \longmapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ est une bijection. Combes p294

Elle se prolonge à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en associant $(-1,0)$ au pt ∞.

<u>App 17</u> = Les points de $\mathbb{U} \setminus \{(-1,0)\}$ à coordonnées rationnelles sont de la forme $f(t)$, pour $t \in \mathbb{Q}$. à dem correctement

<u>App 18</u> = Les solutions entières de $x^2+y^2 = z^2$ sont de la forme $(u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2)$ pour $u, v \in \mathbb{Z}$. à dem correctement Combes p273 → cf dvlpt

4. Argument / Groupe des rotations

<u>Def 19</u> = Étant donné un nb complexe $z \neq 0$, on appelle argument de z tout réel θ tel que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$. On note $arg(z)$ l'ensemble des arguments de z.

<u>Prop 20</u> = Si $z \in \mathbb{C}^\times$, soit $\theta_0 \in arg(z)$, $arg(z) = \theta_0 + 2k\pi$.

<u>Ex 21</u> = $arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

<u>Def 22</u> - Soit $z \in \mathbb{C}^\times$, on appelle forme trigonométrique de z tout couple $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tq $z = re^{i\theta}$.

<u>Def 23</u> - On appelle argument principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ l'unique réel de $arg(z) \cap]-\pi, \pi[$. On le note $Arg(z)$.
+ angle orienté cf Mercier lien avec $O(n)$ et $SO(n)$ AF p241

II SOUS GROUPES DE L'UNITÉ RACINES DE L'UNITÉ. + cyclotomie

<u>Prop 24</u> = Un sous groupe de $\mathbb{U}$ est soit dense, soit fermé

<u>Ex 25</u> = • $\langle e^{it} \rangle$, $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un sg dense
• $\mathbb{U}$ est un sg fermé.

1. Sous groupes des racines de l'unité. A.F p235

<u>Def 26</u> = Le sous groupe des racines n-èmes de l'unité est $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, |z|^n = 1\} = \ker f_n$

<u>Prop 25*</u> = $f_n : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$, $z \longmapsto z^n$ est un morphisme de groupe surjectif.

<u>Prop 27</u> : $\mathbb{U}_n = \{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]\}$.
• $|\mathbb{U}_n| = n$.

+ les sg de $\mathbb{U}_n$ sont les $\mathbb{U}_d$ $d|n$.

• $\mathbb{U}_n \simeq \mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{U}_n$ $\bar{k} \longmapsto \exp(2i\frac{k\pi}{n})$ isomorphisme de gpes

Thm 28 = Soit $n \geq 2$. Le seul sous groupe fini de cardinal n de $(\mathbb{C}^\times, \times)$ est $\mathbb{U}_n$.

Prop 29 = $\mathbb{U}_d \subset \mathbb{U}_n \Leftrightarrow d | n$.

Def 30 = On appelle racine n-ième primitive de l'unité dans $\mathbb{C}$, tout générateur du groupe $\mathbb{U}_n$, i.e. $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!], k \wedge n = 1\}$

On note leur ensemble $\mathbb{U}_n^\times$.

Rq 31 $|\mathbb{U}_n^\times| = \varphi(n)$, où φ est l'indicatrice d'Euler.

Ex 32 = $\mathbb{U}_3^\times = \{j, j^2\}$

Prop 33 = $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathbb{U}_d^\times$ Calais p86, $\sum_{\xi \in \mathbb{U}_n} \xi = 0$.

App 34 = $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

← Kronecker

2. Polynômes cyclotomiques. Calais p83

Def 35 = Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. On appelle n ème polynôme cyclotomique le polynôme $\Phi_n(X) = \prod_{\xi \in \mathbb{U}_n^\times} (X - \xi)$

Prop 36 = Φ_n est un polynôme unitaire et $\deg(\Phi_n) = \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}^\times$

Ex 37 = $\Phi_3(X) = (X-j)(X-j^2) = X^2+X+1$. $\varphi(3) = 2$.

Prop 38 = $n \geq 1$. $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$

• $\forall n \geq 1$, Φ_n est à coefficients entiers

Rq 39 = D'après cette formule, on peut calculer les Φ_n par récurrence : $\Phi_n(X) = \dfrac{X^n - 1}{\prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} \Phi_d(X)}$ et pour p premier,

$\Phi_p(X) = X^{p-1} + \dots + 1$.

DVLPT [Thm 40 = $\Phi_n(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$, $n \geq 1$

Cor 41 : Soit $n \in \mathbb{N}^\times$, le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de toute racine primitive n-ième ω_n de l'unité dans $\mathbb{C}$ est Φ_n. Donc $[\mathbb{Q}[\omega_n] : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

~~III APPLICATIONS~~ III - Vers d'autres horizons -

1. Le groupe diédral D_n. Ulmer

Les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

Def gpe diédral d'indice n, ordre, générateurs

← à mettre en remarque dans II.

2. Application des polynômes cyclotomiques

~~Thm 42 (Wedderburn) : Tout corps fini est commutatif.~~ Calais p80

Thm 43 Dirichlet faible : Soit $a \in \mathbb{Z}$, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $an+1$, $n \in \mathbb{N}$ réf à chercher

Thm 44 (Kronecker) - Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. On suppose que les racines de P sont toutes de module inférieur ou égal à 1 et que $P(0) \neq 0$. Alors les racines de P sont des racines de l'unité. DVLPT FGN p113 Al 1

Cor 45 = Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire irréductible tel que toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1. Alors $P = X$ ou P est un polynôme cyclotomique. G p89

~~1~~ 3. Matrices circulantes.

FGN A12 p 99

Def 46 = On appelle matrice circulante, une matrice de la forme $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices circulantes.

Prop 47 : $\mathcal{C}$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Thm 48 : Les éléments de $\mathcal{C}$ sont codiagonalisables.

• Les valeurs propres de $A \in \mathcal{C}$ sont les $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^k$, où $\omega \in \mathbb{U}_n$.

App 49 = $A \in \mathcal{C}$ est la matrice dans la base canonique de $\Phi : \mathbb{C}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{C}_{n-1}[X]$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de PF par $X^n - 1$ où $F = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$

+ déterminant d'une matrice circulante p 34

2. Caractères linéaires d'un gpe abélien.

Plan :

I - Le groupe des nb complexes de module 1

1 - Généralités :

"cercles $\mathbb{U}$" + "paramétrisat°"

2. L'exponentielle complexe -

1re partie du "exponentielle et trigo"

3. Les fonctions cos et sin -

L'autre partie -

4 - Utilisat° en géométrie -

argument, angle, O(n) ... -

II - Racines de l'unité et cyclotomie -

1 - Sous groupes des racines de l'unité -

n chose + gpe diédral

2 - Les Polynômes cyclotomiq -

"poly cyclo" + "applicat° des poly cyclo".

III Vers l'algèbre linéaire.

1 - matrices circulantes -

2 - Caractères linéaires d'un gpe abélien (selon la place) -

- G gpe fini d'ordre n, $\rho(g)$ diagonalisable Sp $\subset \mathbb{U}_n$
- si G abélien, toutes rep irréd sont de deg 1 et à valeurs ds $\mathbb{U}_n$ -

App : Table de caractères d'un gpe cycliq