POINTS EXTREMAUX DE LA BOULE UNITÉ DE L(E)

FGN Alg 3 p 130 + H262 T1
↑ décompo polaire

Prérequis : Théorème spectral, A normale $\rho(A) = |||A|||_2$

12' 32 pour énoncés lemmes + démo thm.
3' pour démo de diag propriété.

⚠ pas unicité si on n'est pas dans $GL_n(\mathbb{R})$

Lemme : Décomposition polaire : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

Dém : • 1er cas : si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tAA$ est symétrique définie positive (${}^tx\,{}^tAAx = \|Ax\|_2 \geq 0$)
et si ${}^tx\,{}^tAAx = 0$ alors $Ax = 0$ d'où $x = 0$ car $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
donc il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = S^2$:
Par thm spectral on diagonalise ${}^tAA$ en b.o.n. $= P\,\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{-1}$ $P \in O_n(\mathbb{R})$ $\lambda_i > 0$.
On pose $S = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i})P^{-1} \in S_n(\mathbb{R})$ est def positive car $\sqrt{\lambda_i} > 0$
On pose $O = AS^{-1}$ alors ${}^tOO = {}^t(AS^{-1})AS^{-1} = {}^tS^{-1}\,{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$
donc $O \in O_n(\mathbb{R})$. Donc ce couple (O,S) convient.

• 2e cas : $A \in M_n(\mathbb{R})$ quelconque. Par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$, il existe (A_p) une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A.
Pour tout entier p, on écrit la décomposition polaire de A_p : $A_p = O_p S_p$.

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact (fermé borné en dimension finie), on peut extraire une suite $O_{\varphi(p)}$ qui converge vers $O \in O_n(\mathbb{R})$.

Alors $S_{\varphi(p)} = O_{\varphi(p)}^{-1} A_{\varphi(p)} \longrightarrow O^{-1}A =: S \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$
↳ $S \mapsto {}^tXSX$ continue
∟

Mercier p120

Déf : Soit C un convexe. On dit que $M \in C$ est un point extremal si pour $t \in [0,1]$, $P, Q \in C$.

$$M = (1-t)P + tQ \implies M = P \text{ ou } M = Q$$
∟

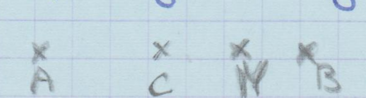
Prop : Soit C un convexe. Soit $M \in C$.
• M est extremal de C
⟺ • M n'est jamais le milieu d'un "vrai" (non réduit à un point) segment $[AB] \subset C$
⟺ • $C \setminus \{M\}$ est convexe.

Dém : • 2 ⟹ 1

• 1 ⟹ 3 : Si M n'est pas un point extremal, il existe A, B dans $C \setminus \{M\}$ tels que $M \in]A,B[$.
mais alors $[AB] \not\subset C \setminus \{M\}$, donc $C \setminus \{M\}$ n'est pas convexe.

• 3 ⟹ 2 : Si $C \setminus \{M\}$ n'est pas convexe, il existe $A, B \in C \setminus \{M\}$ tels que $[AB] \not\subset C \setminus \{M\}$.
Or $[AB] \subset C$ donc $M \in [AB]$.
Si $A = B$ alors $A = B = M$ ↯ Donc $A \neq B$
M est le barycentre de $A(t)$, $B(1-t)$ pour un $t \in]0,1[$.
+ Si $0 < t \leq 1/2$, on note C le symétrique de B par rapport à M. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$
$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$
$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = 2(t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{OB} = 2t\,\overrightarrow{OA} + (1-2t)\overrightarrow{OB}$
donc C est un barycentre à coeffs positifs de A et B donc $C \in [AB]$
donc M est le milieu de $[BC]$ inclus dans C et non réduit à un point.
+ Si $1/2 < t < 1$, on regarde le symétrique D de A par rapport à M.
∟

$t \leq 1/2 \to t \leq 1-t$



Thm = Soit E un espace euclidien et $B = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \underbrace{|||u|||}_{\text{norme } 2} \leq 1\}$. Alors $Extr(B) = O(E)$.

Dém : $\supseteq$: Soit $u \in O(E)$ alors $\langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ d'où $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ pour tout $x \in E$
d'où $|||u||| = 1$.
D'après $1 \Leftrightarrow 2$ dans la prop, on suppose par l'absurde que $u = \frac{1}{2}(v+w)$ avec
$v, w \in B$ $v \neq w$.
Soit $x \in E$ tq $\|x\| = 1$ alors

$$1 = \|x\| = \|u(x)\| = \frac{1}{2}\|v(x)+w(x)\| \underset{(i)}{\overset{I.T}{\leq}} \frac{1}{2}(\|v(x)\| + \|w(x)\|) \underset{(ii)}{\overset{\text{car } \|x\|=1}{\leq}} \frac{1}{2}(|||v||| + |||w|||) \underset{(iii)}{\overset{v,w \in B}{\leq}} 1$$

Donc toutes ces inégalités sont des égalités :

(iii) : $|||v||| = 1 = |||w|||$. donc par (ii), $\|v(x)\| = |||v||| = |||w||| = \|w(x)\|$. donc $\neq 0$

(i) : cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $v(x) = \lambda w(x)$
car $v(x) \neq 0$ et $w(x) \neq 0$.
Or $\|v(x)\| = \|w(x)\|$ d'où $|\lambda| = 1$ donc $\lambda = 1$.
Donc pour tout $x \in E$, $\|x\| = 1$, on a $v(x) = w(x)$ donc par linéarité $v = w$
donc u ne s'écrit pas comme un milieu donc u est extremal.

$\subseteq$: Réciproquement, on va montrer que $B \setminus O(E) \subset B \setminus Extr(B)$. On aura le résultat en passant au complémentaire.
Soit $u \in B \setminus O(E)$. On va montrer que u n'est pas extremal.
- Comme E est de dimension finie n, on peut travailler matriciellement.
Soit A la matrice de u dans une b.o.n. de E
$\Rightarrow u \in O(E) \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R})$

$A \notin O_n(\mathbb{R})$ donc d'après la décomposition polaire, il existe $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tq $A = OS$.

Comme S est symétrique réelle, elle est diagonalisable en b.o.n : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq
$S = {}^tPDP$ où $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ $d_i \in \mathbb{R}^+$.
- On a alors
$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|OSx\|}{\|x\|} \overset{O \in O_n(\mathbb{R})}{=} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} \text{ donc en passant au } \sup_{x \in E \setminus \{0\}}, \text{ on a } |||A||| = |||S|||.$$
Or $u \in B$ donc $|||S||| = |||A||| \leq 1$.
Or S est symétrique donc normale donc $|||S||| = \rho(S)$ donc $d_k \in [0,1]$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$.
- Or $A \notin O_n(\mathbb{R})$ donc $S \neq id$ donc il existe k_0 tel que $d_{k_0} \neq 1$.
Quitte à permuter les d_i, on peut supposer que c'est d_1. On a donc $0 \leq d_1 < 1$.

On peut alors écrire $d_1 = \frac{a+b}{2}$ $-1 \leq a < b \leq 1$: d_1 n'est pas un pt extremal de $[-1, 1]$
donc c'est le milieu d'un vrai segment $[a, b] \subset [-1, 1]$.

On pose $D' = diag(a, d_2, \ldots, d_n)$ et $D'' = diag(b, d_2, \ldots, d_n)$. Alors $D = \frac{1}{2}(D' + D'')$ avec
$D' \neq D''$ car $a \neq b$

- Ainsi $A = OS = O\,{}^tPDP = O\,{}^tP\,\frac{1}{2}(D'+D'')P = \frac{1}{2}(O\,{}^tPD'P + O\,{}^tPD''P)$
Il reste à vérifier que $O\,{}^tPD'P$ et $O\,{}^tPD''P$ sont des points de B distincts. Ils sont distincts car $D' \neq D''$.

De plus, $|||O\,{}^tPD'P||| \leq \underbrace{|||O|||}_{=1}\ \underbrace{|||{}^tP|||}_{=1}\ |||D'|||\ \underbrace{|||P|||}_{=1} = |||D'||| \overset{D' \text{ diagonale donc normale}}{=} \rho(D') \leq 1$

De même pour l'autre.
Donc A s'écrit comme milieu de deux points distincts de B, donc A n'est pas extremal.
et donc u