15''30 sans énoncé.

THÉORÈME D'APPROXIMATION DE WEIERSTRASS PAR LES POLYNOMES DE BERNSTEIN.

ZQ p518.

Prérequis : • thm de Heine
• espérance, inégalité de Tchebychev, variance et indépendance

Thm : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On pose
$\omega(h) := \sup\{|f(u)-f(v)|,\ |u-v| \leq h\}$ son module de continuité uniforme.
On considère $B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ le n^e polynôme de Bernstein de f. Alors.

× (B_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

× $\|f - B_n\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ où C est une cste.

× l'estimation précédente est optimale, il existe f continue sur $[0,1]$ tq
$\|f - B_n\|_\infty \geq \delta\, \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ pour une cste $\delta > 0$.

ω = appli° $\nearrow$ non nulle de $\mathbb{R}^+$ ds $\mathbb{R}^+$, nulle en 0.

Dém :

Etape 1 : Mise en place

Soit $x \in [0,1]$, et soit (X_i) une suite de variables de Bernoulli iid de paramètre x.
On note $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Alors $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ et on a

$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(x)$ par lemme de transfert.

$\mathbb{E}[f(x)] = f(x)$.

Heuristique : $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} x$ par LGN faible donc on aimerait que $B_n(x)$ soit "proche" de $f(x)$
↳ bernoulli a un moment d'ordre 2

On a.

$|f(x) - B_n(x)| = \left|\mathbb{E}\left[f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right| \leq \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right]$.

Etape 2 : Majoration grossière avec l'inégalité de Tchebychev.

Comme f est continue sur $[0,1]$ compact, elle est uniformément $\mathcal{C}^0$ par thm de Heine, donc $\omega(h)$ est bien définie et $\omega(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Ainsi, si $\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \leq \delta$, $\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \omega(\delta)$.

Or comme $\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq 2\|f\|_\infty$, on a pour $\delta > 0$.

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \omega(\delta) \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \leq \delta\right)}_{\leq 1} + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right)$$

$$\leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right)$$

Or d'après l'inégalité de Tchebychev, $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - x| > \delta) \leq \frac{Var(\frac{S_n}{n})}{\delta^2} = \frac{Var(S_n)}{n^2\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$
↳ variance finie

$\leq \frac{1}{4n\delta^2}$ par étude de $x \mapsto x(1-x)$

donc $\|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$

d'où $\limsup_{n\to+\infty} \|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$ d'où $\|f - B_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Etape 3 : Etude du module d'uniforme continuité.

Etape 3a : Pour $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$, $\omega(\delta_1+\delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$. (ne pas faire le jour J)

Soient x, t tq $|x-t| \leq \delta_1 + \delta_2$.

× si $|x-t| \leq \delta_1$, alors $|f(x) - f(t)| \leq \omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$

× sinon, on suppose $x \geq t$, alors
↳ $x - t \geq \delta_1$ $x \geq t + \delta_1$

$|f(t) - f(x)| \leq |f(t) - f(t+\delta_1)| + |f(t+\delta_1) - f(x)| \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$

car $|x - (t+\delta_1)| = x - t - \delta_1 = |x-t| - \delta_1 \leq \delta_1 + \delta_2 - \delta_1 = \delta_2$

Donc dans tous les cas $\omega(\delta_1+\delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$ en passant au sup.

Etape 3b : $\omega(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$ (ne pas faire le jour J)

Par récurrence, on a $\omega(nh) \leq n\omega(h)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Or ω est croissante donc, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ $\omega(\lambda h) \leq \omega(\lceil\lambda\rceil h) \leq \lceil\lambda\rceil\omega(h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$

Etape 4 : Majoration plus fine.

Par définition de ω,

$|f(x) - B_n(x)| \leq \mathbb{E}[|f(x) - f(\frac{S_n}{n})|] \leq \mathbb{E}[\omega(|x - \frac{S_n}{n}|)]$

or $\omega(|x - \frac{S_n}{n}|) = \omega(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n}|x - \frac{S_n}{n}|) \leq (\sqrt{n}|x - \frac{S_n}{n}| + 1)\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$ par 3b

d'où

$|f(x) - B_n(x)| \leq \mathbb{E}[\sqrt{n}|x - \frac{S_n}{n}| + 1]\omega(\frac{1}{\sqrt{n}}) = (\sqrt{n}\|x - \frac{S_n}{n}\|_1 + 1)\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$

$\leq (\sqrt{n}\|x - \frac{S_n}{n}\|_2 + 1)\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$ par inégalité de Hölder.

Or $\|x - \frac{S_n}{n}\|_2^2 = \mathbb{E}[(x - \frac{S_n}{n})^2] = Var(x - \frac{S_n}{n}) + \underbrace{\mathbb{E}[x - \frac{S_n}{n}]}_{=0}{}^2$

$= \frac{Var(S_n)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n}$

d'où $|f(x) - B_n(x)| \leq (\sqrt{n}\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} + 1)\omega(1/\sqrt{n}) \leq \frac{3}{2}\omega(1/\sqrt{n})$

par étude de $x \mapsto x(1-x)$.

d'où $\|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega(1/\sqrt{n})$

Etape 5 : Majoration optimale.

$|x-\frac{1}{2}|-|t-\frac{1}{2}| \leq |x-t|$

On pose $f : x \mapsto |x-\frac{1}{2}|$ alors $\omega(h) \leq h$ par I.T inversée.

Or $X_i \sim \mathcal{B}(1/2)$

$$\|f-B_n(f)\|_\infty \geq |f(\tfrac{1}{2})-B_n(\tfrac{1}{2})| = |B_n(\tfrac{1}{2})| = \mathbb{E}[f(\tfrac{S_n}{n})] = \mathbb{E}[|\tfrac{S_n}{n}-\tfrac{1}{2}|]$$
$$= \frac{1}{2n}\mathbb{E}[|2S_n-n|] = \frac{1}{2n}\mathbb{E}[|\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n|]$$

où les ε_i sont des Rademachers iid

$\varepsilon_i = 2X_i - 1$.

égalité en loi

On a donc

$$\|f-B_n(f)\|_\infty \geq \frac{1}{2n}\|\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n\|_1 \geq \frac{1}{2n\sqrt{e}}\|\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n\|_2$$ par inégalité de Khintchine.

Or $\|\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n\|_2^2 = \underbrace{\mathrm{Var}(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n)}_{=\mathrm{Var}(2S_n-n)} + \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n]}_{=0}^2 = n$

$= 4\,\mathrm{Var}(S_n) = 4nx(1-x) = n$ car $x = 1/2$

d'où $\|f-B_n(f)\|_\infty \geq \frac{1}{2\sqrt{ne}} \geq \frac{1}{2\sqrt{e}}\,\omega(1/\sqrt{n})$ car $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq 1/\sqrt{n}$.

Etape 6 : Inégalité de Khintchine

Ne pas faire.

Soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des variables de Rademacher iid. Soit f une fonction cb linéaire des ε_i. Alors $\|f\|_2 \leq \sqrt{e}\,\|f\|_1$.

On a $f = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$, comme $\varepsilon_i^2 = 1$ p.s., $\|f\|_2^2 = \sum a_i^2$. Quitte à tout diviser par $\|f\|_2$, on peut supposer $\|f\|_2 = 1$.

On pose $g = \prod_{j=1}^n (1+ia_j\varepsilon_j)$. alors pour presque tout x,

* $|g(x)| = \prod_{j=1}^n \sqrt{1+a_j^2\varepsilon_j^2} = \prod_{j=1}^n \sqrt{1+a_j^2} \leq \prod_{j=1}^n \sqrt{\exp(a_j^2)}$ $1+u \leq e^u$ car exp convexe $\geq$ tangente en 0

$\leq \sqrt{\exp(\underbrace{\sum a_j^2}_{=1})} = \sqrt{e}$. d'où $\|g\|_\infty \leq \sqrt{e}$.

* On a $|\mathbb{E}[fg]| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$, or $\mathbb{E}[fg] = \sum_{j=1}^n a_j \mathbb{E}[\varepsilon_j g]$.

Or $\mathbb{E}[\varepsilon_j g] = \mathbb{E}[\varepsilon_j(1+ia_j\varepsilon_j)\prod_{k\neq j}(1+ia_k\varepsilon_k)]$

$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{E}[\varepsilon_j(1+ia_j\varepsilon_j)] \prod_{k\neq j} \underbrace{\mathbb{E}[1+ia_k\varepsilon_k]}_{=1}$

$= ia_j$ car $\mathbb{E}[\varepsilon_j] = 0$

d'où

$\mathbb{E}[fg] = \sum_{j=1}^n ia_j^2$ d'où $|\mathbb{E}[fg]| = 1$ car $\sum a_j^2 = 1$

d'où $\|f\|_1 \geq \frac{|\mathbb{E}[fg]|}{\|g\|_\infty} \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Notes :

✓ **A l'oral**, (1) 6'34 (2) 9'30 (3) 14' à allure normale
✓ Loi Bernoulli : $\mathcal{B}(p)$. Espérance : p. Variance : $p(1-p)$. Fonction caractéristique : $1-p+pe^{it}$.
✓ Loi Binomiale : $\mathcal{B}(n,p)$. Espérance : np. Variance : $np(1-p)$. Fonction caractéristique : $(1-p+pe^{it})^n$.
✓ Attention ! ZQ part du principe que le module de continuité uniforme vérifie certaine propriété (comme module de continuité). On les revérifie simplement, sauf celle montrée dans le **Lemme**.
✓ Le théorème a été établi en 1885 par WEIERSTRASS. STONE a considérablement généralisé le théorème en 1937 et en simplifia le preuve en 1948.
♣ Karl WEIERSTRASS (1815 - 1897) -pneumonie- est un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895. Il créa avec ENNEPER une classe complète de paramétrisations. Il est souvent cité comme le "père de l'analyse moderne". Il consolida des travaux de Cauchy sur les nombres irrationnels et leur amena une nouvelle compréhension. Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques. C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable.
♣ Marshall STONE (1903 - 1989) est un mathématicien américain célèbre pour ses contributions en analyse réelle, en analyse fonctionnelle et en théorie des algèbres de Boole.
♣ Attention il y a trois mathématiciens BERNSTEIN :
Joseph (1945), israélien,
Felix (1878 - 1956), allemand, théorème de Cantor-Bernstein,
Sergeï (1880 - 1968) soviétique, auteur de cette démonstration. Sa thèse de doctorat soumise en 1904 à la Sorbonne résout le 19e problème de Hilbert. Ses travaux portent sur l'approximation des fonctions et la théorie des probabilités.
♣ Alexandre KHINTCHINE (1878 - 1959) est un mathématicien russe puis soviétique. Il est principalement connu pour son travail sur la théorie des probabilités. Ses travaux portent notamment en mathématiques sur l'analyse réelle, la théorie des probabilités, la théorie ergodique et les fractions continues, et en physique sur la physique statistique.

✓ Rappel : lim sup, lim inf.
Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite bornée de réels. Alors $v_n = \sup\{u_k \mid k \geqslant n\}$ est décroissante et $w_n = \inf\{u_k \mid k \geqslant n\}$ est croissante. De plus, comme $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$, ce sont donc des suites convergentes.
On pose : $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \inf v_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n \sup w_n$.
On a alors, par ex, $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si la suite n'est pas majorée, et $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si la suite n'est pas minorée.
Exemples : $\limsup\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = 1$, $\liminf\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = -1$, $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sin n = 1$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} \sin n = -1$