THÉORÈME DE PROJECTION.

Li p32.

15'06 sans ④ (Revoir étape 3 pour pas oublier).

Prérequis = suite de Cauchy, un fermé dans un complet est complet, identité du parallélogramme

Thm = Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un Hilbert et soit $\mathcal{C} \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors.

① Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $P_C(x) \in \mathcal{C}$ tq $\|x - P_C(x)\| = d(x, \mathcal{C})$ où $d(x, \mathcal{C}) := \inf \{\|x-y\|, y \in \mathcal{C}\}$.
On dit que $P_C(x)$ est la projection de x sur $\mathcal{C}$.

② $P_C(x)$ est caractérisé par $P_C(x) \in \mathcal{C}$ et $\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle) \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C}$.
$\hookrightarrow$ Faire un dessin en dim 2

③ $P_C : H \to \mathcal{C}$ est 1-lipschitzienne.

④ Si F est un sev fermé de H alors $P_F(x)$ est caractérisé par $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$ (*)
En particulier, si F est de dimension finie et si $(b_1, \dots, b_n)$ est une b.o.n. de F, alors $P_F(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, b_j \rangle b_j$.

(*) $P_F : H \to F$ est linéaire et continue.

Dém: ①.

Étape 1: Existence = suite de Cauchy.

Soit $x \in H$.
On note $d = d(x, \mathcal{C})$. On commence par remarquer que si $d = 0$ alors $x \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est fermée) et $y = x$ est donc l'unique point de $\mathcal{C}$ tq $\|x - y\| = d$.
Soit $x \in H \setminus \mathcal{C}$.
Soit (y_n) une suite de $\mathcal{C}$ tq $\|x - y_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} d$. Elle existe par définition de l'inf.

On commence par montrer que (y_n) est une suite de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0 \quad \|x - y_n\|^2 \leq d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}$ alors

$\forall n, m \geq n_0 \quad \|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2$ d'après l'identité du parallélogramme appliquée à $x - y_n$ et $x - y_m$.

Or par convexité de $\mathcal{C}$, $\frac{y_n + y_m}{2} \in \mathcal{C}$ d'où $\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 \geq d^2$. Ainsi,

$\forall n, m \geq n_0, \quad \|y_n - y_m\|^2 \leq 2(d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} + d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}) - 4d^2 \leq \varepsilon^2$.

pas comme le Li (Par conséquent, la suite (y_n) est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}, \|\cdot\|)$. Or $\mathcal{C}$ est fermé dans H complet donc $(\mathcal{C}, \|\cdot\|)$ est complet. Donc (y_n) converge dans $\mathcal{C}$ vers un point $P_C(x) \in \mathcal{C}$ et par unicité de la limite, $\|x - P_C(x)\| = d$.

Étape 2 = Unicité : identité du parallélogramme.

Soient y_1 et y_2 deux points de $\mathcal{C}$ tels que $\|x - y_1\| = d = \|x - y_2\|$. Alors d'après l'identité du parallélogramme en $x - y_1$ et $x - y_2$, on a

$$0 \leq \|y_1 - y_2\|^2 = 2(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2) - 4\|x - \underbrace{\frac{y_1 + y_2}{2}}_{\in \mathcal{C} \text{ par convexité}}\|^2 \leq 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0.$$

D'où $y_1 = y_2$.

② Etape 3 : Caractérisation : convexité et $t \to 0^+$.

$\Rightarrow$. Si $z \in \mathcal{C}$, pour $t \in]0,1]$, $(1-t)P_C(x) + tz \in \mathcal{C}$ par convexité de $\mathcal{C}$ donc

$$\underbrace{\|x - [(1-t)P_C(x) + tz]\|^2}_{= \|(x - P_C(x)) + t(P_C(x) - z)\|^2} \geq \|x - P_C(x)\|^2.$$

D'où en développant,
$$t^2 \|P_C(x) - z\|^2 + 2t \, \mathrm{Re}(\langle x - P_C(x), P_C(x) - z\rangle) \geq 0$$

Pour $t \neq 0$, cela donne

$$t \|P_C(x) - z\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x), P_C(x) - z\rangle) \geq 0$$

Puis $t \to 0^+$ d'où
$$2\,\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle) \leq 0.$$ Attention !

$\Leftarrow$. Etape 4 : Caractérisation : avec l'unicité.

Si $y \in \mathcal{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0 \ \forall z \in \mathcal{C}$, on va montrer que $\|x-y\| = d$ et on utilisera l'unicité du thm.

Soit $z \in \mathcal{C}$
$$\|x - z\|^2 = \|(x-y) + (y-z)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x-y, y-z).$$
$$= \|x-y\|^2 + \underbrace{\|y-z\|^2}_{\geq 0} - 2\,\underbrace{\mathrm{Re}(x-y, z-y)}_{\leq 0 \text{ par hypothèse sur } y} \geq \|x-y\|^2. \text{ Donc } d^2 \geq \|x-y\|^2.$$

Donc $d = \|x-y\|$ donc par unicité dans ①, $y = P_C(x)$.

③ Etape 5 : Lipschitziannité : développer et ② pas comme dans le Li

On a $\|x-y\|^2 = \|P_C(x) - P_C(y) + [x - P_C(x)] - [y - P_C(y)]\|^2$

$$= \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 + \|[x - P_C(x)] - [y - P_C(y)]\|^2 - 2\,\underbrace{\mathrm{Re}\langle P_C(y) - P_C(x), x - P_C(x)\rangle}_{\leq 0 \text{ par ② pour } P_C(x)}$$
$$- 2\,\underbrace{\mathrm{Re}\langle P_C(x) - P_C(y), y - P_C(y)\rangle}_{\leq 0 \text{ par ② pour } P_C(y)}$$
$$\geq \|P_C(x) - P_C(y)\|^2.$$

④ Etape 6 : Pythagore + sev.

- Si $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$, on a $d(x,F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|^2 = \inf_{z \in F} [\|\underbrace{x-y}_{\in F^\perp}\|^2 + \|\underbrace{y-z}_{\in F}\|^2]$ par Pythagore
$= \|x-y\|^2$

  Donc par unicité dans ①, $y = P_F(x)$.

- Réciproquement, $P_F(x)$ vérifie $\mathrm{Re}\langle x - P_F(x), z - P_F(x)\rangle \leq 0 \quad \forall z \in F$

  or F est un sev donc $\{z - P_F(x), z \in F\} = F$. donc $\mathrm{Re}(\langle x - P_F(x), \omega\rangle) \leq 0 \quad \forall \omega \in F$.
  Quitte à remplacer ω par $-\omega$, on en déduit que $\mathrm{Re}(\langle x - P_F(x), \omega\rangle) = 0 \quad \forall \omega \in F$.
  d'où $x - P_F(x) \in F^\perp$.

- Linéarité : On a $(x - P_F(x))$ et $(y - P_F(y)) \in F^\perp$ donc pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$,

  $(\lambda_1 x + \lambda_2 y) - (\lambda_1 P_F(x) + \lambda_2 P_F(y)) \in F^\perp$ car $F^\perp$ est un sev donc par ②,

  $P_F(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 P_F(x) + \lambda_2 P_F(y)$.

- On a $\|P_F(x)\| \leq \|x\| \ \forall x \in F$ par ③ or $\forall x \in F \ P_F(x) = x$ donc $|||P_F||| = 1$ donc continue.