< 15 min ok.

TABLE DE CARACTÈRES DE $\mathfrak{S}_4$

Peyré

Prérequis : • deux élts de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués ssi ils ont m̄ type
• construction d'une table de caractères

Étape 1 : On commence par déterminer les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$.

Dans $\mathfrak{S}_n$, deux éléments sont conjugués ssi ils ont le même type, on a donc les classes de conjugaison classées par type :

- $[1,1,1,1]$ = id : 1 élt.
- $[1,1,2]$ = les transpositions. $\binom{4}{2} = 6$ éléments
- $[2,2]$ = les double transpositions $\frac{\binom{4}{2}}{2} = 3$ éléments car $(12)(34) = (34)(12)$
- $[1,3]$ = les 3 cycles : $2 \times \binom{4}{3} = 8$ éléments car $(123) \neq (132)$
- $[4]$ = les 4-cycles $3! = 6$ éléments.

On a donc 5 classes de conjugaison. Or le nombre de caractères irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaison. Donc $\mathfrak{S}_4$ admet 5 caractères irréductibles.

Étape 2 : La représentation triviale et le morphisme signature

Les représentations de degré 1 sont irréductibles, on en connait deux caractères associés à des représentations de degré 1 : triviale et signature.

$\chi_1 \equiv 1$ et $\chi_\varepsilon \equiv \overset{\leftarrow \text{car degré } 1}{\varepsilon} : \mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

	id	(1,2)	(1,2)(3,4)	(1,2,3)	(1,2,3,4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	−1	1	1	−1

Étape 3 : La représentation par permutations.

On note $B = (e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$ et on définit la représentation par permutations par

$$\rho_P : \mathfrak{S}_4 \longrightarrow GL(\mathbb{C}^4)$$
$$\sigma \longmapsto (e_i \longmapsto e_{\sigma(i)})$$

Cette représentation laisse stable $\text{Vect}\{(1,1,1,1)\}$ qui a pour supplémentaire

$H = \{x \in \mathbb{C}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ qui est lui aussi stable.

Donc ρ_P induit une représentation ρ_S sur H, appelée représentation standard.

On a $\mathbb{C}^4 = \text{Vect}\{(1,1,1,1)\} \oplus H$. car ρ_P induit la représentation triviale sur $\text{Vect}(1,1,1,1)$.
$\chi_P = \chi_1 + \chi_S$

Pour savoir si χ_S est irréductible, il suffit de calculer $\langle \chi_S, \chi_S \rangle$. On vient de voir que $\chi_S = \chi_P - \chi_1 = \chi_P - 1$, il suffit donc de calculer χ_P.

La matrice de $\rho_p(\sigma)$ ne contient que des 0 et des 1 et $\chi_p(\sigma)$ compte le nombre de 1 sur la diagonale de cette matrice i.e. le nombre de points fixes de σ

Ainsi,

	id_{1}	$(1,2)_{6}$	$(1,2)(3,4)_{3}$	$(1,2,3)_{8}$	$(1\,2\,3\,4)_{6}$
χ_p	4	2	0	1	0
d'où χ_S	3	1	-1	0	-1

d'où $|\mathfrak{S}_4| \langle \chi_S, \chi_S \rangle = 3^2 \times 1 + 1^2 \times 6 + (-1)^2 \times 3 + 0^2 \times 8 + (-1)^2 \times 6 = 24$

donc $\langle \chi_S, \chi_S \rangle = 1$ donc χ_S est irréductible et on peut le rajouter à la table.

Etape 4 : Degré des caractères restants.

On a $\sum_{i=1}^{5} n_i^2 = |\mathfrak{S}_4| = 24$ où n_i est le degré du i^e caractère donc

$1^2 + 1^2 + 3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 24$ donc $n_4^2 + n_5^2 = 13$ d'où $n_4 = 2$ et $n_5 = 3$.

(ou l'inverse mais on s'en fiche !)

Etape 5 = Un peu de géométrie.

On sait que $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Isom}^+(\text{Cube})$ (cf dvlpt), on a donc un morphisme

$\rho_c = \mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathrm{Isom}^+(\text{Cube}) \subset O_3(\mathbb{R}) \subset GL_3(\mathbb{R}) \subset GL_3(\mathbb{C})$ qui fournit une représentation de degré 3.

ρ_c : id $\longmapsto$ id.

transpositions $\longmapsto$ rotations d'angle π d'axe joignant les milieux de deux côtés
double transpo $\longmapsto$ rotations d'angle π autour d'un axe orthogonal à 2 faces
3 cycles $\longmapsto$ rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'une des diagonales
4 cycles $\longmapsto$ rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour d'un axe orthogonal à 2 faces

Comme la trace d'une rotation vectorielle d'angle θ est $1 + 2\cos\theta$, on obtient facilement les valeurs de χ_c.

	id	(1.2)	(12)(34)	(1.23)	(1234)
χ_c	3	-1	-1	0	1

Pour montrer que χ_c est irréductible, il suffit de mq $\langle \chi_c, \chi_c \rangle = 1$ comme avant.

Etape 6 = Dernier caractère.

on remplit en utilisant $\sum_{i=1}^{5} n_i \chi_i(s) = 0$ pour $s \neq \mathrm{id}$

	id	(1.2)	(12)(34)	(123)	(1234)
χ_4	2	0	2	-1	0

Pq = $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Isom}^+(\text{tétraèdre}) \longrightarrow \chi_S$.