204 8

Surjectivité de l'exponentielle

17min — 15' sans étape 1 ni prop sur Π ni C^1 exp.

Théorème : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. En particulier, la fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on veut montrer que $\exp(\mathbb{C}[B]) = \mathbb{C}[B]^\times$ = polynôme en B dont l'inverse reste un polynôme en B. 1'34

__Etape 1 : $\mathbb{C}[B]^\times = \mathbb{C}[B] \cap GL_n(\mathbb{C})$.__ Ne pas dulper.

$\subset$: évident

$\supset$: Soit $M \in \mathbb{C}[B] \cap GL_n(\mathbb{C})$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0$. et $\chi_M(X) = X^n + \dots + (-1)^n a_0$. avec $(-1)^n a_0 = \det M \neq 0$ car $M \in GL_n(\mathbb{C})$ d'où $\chi_M(X) = X Q(X) + (-1)^n a_0$ d'où $M^{-1} = \frac{Q(M)}{(-1)^n a_0} \in \mathbb{C}[M] \subset \mathbb{C}[B]$.

4'17

__Etape 2 : $\exp : (\mathbb{C}[B], +) \to (\mathbb{C}[B]^\times, \cdot)$ est un ~~morphisme de groupes~~ bien défini.__

* Si $M \in \mathbb{C}[B]$ alors $\exp(M) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$ est limite de polynômes en B donc d'éléments de $\mathbb{C}[B]$.

  Or $\mathbb{C}[B]$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie $= \deg \pi_B$ donc est fermé donc $\exp(M) \in \mathbb{C}[B]$.

  Par ailleurs $\exp(M) \in GL_n(\mathbb{C})$ car d'inverse $\exp(-M)$.
  L'application est donc bien définie. On a donc $\exp(\mathbb{C}[B]) \subset \mathbb{C}[B]^\times$.

* Comme deux éléments de $\mathbb{C}[B]$ commutent, exp est bien un morphisme de groupes

10'16

__Etape 3 : $\mathbb{C}[B]^\times$ est connexe. (car connexe par arcs).__

Soient $M, N \in \mathbb{C}[B]^\times$, on pose $P(z) = \det(zM + (1-z)N)$ un polynôme qui est non nul car $P(0) = \det N \neq 0$. donc l'ensemble Z de ses racines est fini. $\mathbb{C} \setminus Z$ est donc connexe par arcs et contient 1 et 0 car $P(1) = \det M \neq 0$. d'où il existe γ un chemin reliant 0 à 1 dans $\mathbb{C} \setminus Z$ et donc $\gamma(t) M + (1-\gamma(t)) N \in \mathbb{C}[B]^\times$ et relie N à M.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach.

$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!} \in C^1$ car polynomiale

$df_n(x) \cdot h = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} x^k h x^{n-1-k}$

$\|df_n(x) \cdot h\| \leq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \|x^k h x^{n-1-k}\|$

$\leq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \|h\| \|x\|^{n-1} \leq \frac{\|x\|^{n-1}}{(n-1)!} \|h\|$

donc $\|df_n(x)\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq \frac{\|x\|^{n-1}}{(n-1)!}$, $x \in E$

Soit $R > 0$, $U = B_E(0, R)$

* U est un ouvert connexe car convexe
* $f_n \in C^1(U, E)$ $\forall n$.
* $\sum f_n(x)$ cv ds E $\forall x$ (CCN)
* $\sum df_n(x)$ cv ds $\mathcal{L}_c(E, E)$ unif pr à x car $\|df_n(x)\| \leq \frac{R^{n-1}}{(n-1)!}$ + s.c

D'après thm de différentiabilité des séries de fct°, exp est $C^1(U, E)$ et $d(\exp)(x)(h) = \sum_{n=1}^{\infty} df_n(x) h$

C'est vrai $\forall R$ donc exp $C^1(E, E)$

Laura GAY

$\exp(H) = \sum \frac{H^k}{k!} = I_n + H + o(\|H\|)$

* La différentielle en 0 de exp est I_n qui est bien inversible
* $\mathbb{C}[B]$ est un Banach car sev de dim finie d'un e.v.n.

Donc d'après le théorème d'inversion locale, il existe U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}[B]$, V un voisinage de $\exp(0) = I_n$ dans $\mathbb{C}[B]^\times$ tels que $\exp : U \to V$ soit un C¹-difféomorphisme avec $\exp(U) = V \subset \exp(\mathbb{C}[B])$.

Soit $A \in \mathbb{C}[B]$, $\exp(A) \in \exp(\mathbb{C}[B])$

Soit $E \in U$ $\exp(A+E) = \exp(A)\exp(E) \in \exp(A)V$.
Soit $F \in V$, $\exists E \in U$ tq $F = \exp(E)$
$\exp(A)F = \exp(A+E) \in \exp(A+U)$

et $\exp(A+U) = \exp(A) \times V$ (car commutent car dans $\mathbb{C}[B]$.
ou : car exp est un morphisme de gpes sur $\mathbb{C}[B]$.

Or $f : N \mapsto \exp(A)N$ est un difféomorphisme (car $\exp(A)$ inversible)

d'où $f(V) = \exp(A)V$ est un ouvert, $\exp A \in \exp A\, V$ et $\exp A\, V = \exp(A+U) \subset \exp(\mathbb{C}[B])$
d'où $\exp(A)V$ est un voisinage de $\exp(A)$ dans $\exp(\mathbb{C}[B])$

Donc $\exp(\mathbb{C}[B])$ est ouvert car voisinage de tous ses points.

Etape 5 : $\exp(\mathbb{C}[B])$ est un fermé de $\mathbb{C}[B]^\times$

$$\mathbb{C}[B]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[B]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[B]^\times \setminus \exp \mathbb{C}[B]} M \exp(\mathbb{C}[B])$$

$\subset$: si $N \in \mathbb{C}[B]^\times \setminus \exp \mathbb{C}[B]$, $N = N\exp(0)$.
$\supset$: Si $N \in \bigcup M\exp(\mathbb{C}[B])$, $N = M \times \exp(P)$ où $P \in \mathbb{C}[B]$ et $M \in \mathbb{C}[B]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[B])$.
si $N \in \exp(\mathbb{C}[B])$ alors $M = N\exp(-P) \in \exp(\mathbb{C}[B])$ ↯.

Donc $\mathbb{C}[B]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[B])$ est un ouvert comme réunion d'ouverts.
d'où par passage au complémentaire, $\exp(\mathbb{C}[B])$ est fermé dans $\mathbb{C}[B]^\times$

Etape 5 : Conclusion

$\exp(\mathbb{C}[B])$ est fermé et ouvert dans le connexe $\mathbb{C}[B]^\times$. Or il est non vide
d'où $\exp(\mathbb{C}[B]) = \mathbb{C}[B]^\times$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$, d'où il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tq $A = \exp(P(A))$. D'où la surjectivité de l'exponentielle.

Cependant $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Prop : On a $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

$\subset$: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\exp(M) = \exp\left(\frac{1}{2}M\right)^2$ et $\exp\left(\frac{1}{2}M\right) \in GL_n(\mathbb{R})$.

$\supset$: Soit $M = A^2$, $A \in GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$. D'après le thm, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tq

$A = \exp(P(A))$. Mais par continuité de la conjugaison,

$\overline{A} = \overline{\exp(P(A))} = \exp(\overline{P}(A))$, d'où $\exp((P+\overline{P})(A)) = A \times \overline{A} = A^2 = M$.
$= A$ car P et $\overline{P}$ commutent.

et $(P+\overline{P})(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$Sp(A) = \{-1\}$

Contre ex : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par exp.

Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tq $\exp(B) = A$, alors.

× si λ est vp de B, $\exp \lambda$ est vp de A. d'où $\lambda = i\pi + 2ik\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

donc $\lambda \neq \bar{\lambda}$ or B est réelle donc $\bar{\lambda}$ est aussi vp de B. donc B a deux vp distinctes, elle est diagonalisable. Donc A est diagonalisable ⚡.

Rq : $\det \exp B = \exp \operatorname{tr}(B) > 0$ d'où si A est de dét < 0 alors elle n'est pas $\exp(B)$.

$S_n^{++}(\mathbb{R}) = S_n^+(\mathbb{R}) \cap \underbrace{GL_n(\mathbb{R})}_{\text{ouvert de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ ouvert de $S_n^+(\mathbb{R})$

$\mathbb{C}[B]$ est un anneau et donc $\mathbb{C}[B]^\times$ est les inversible de l'anneau $\mathbb{C}[B]$.