SO3(ℝ) EST SIMPLE MAIS PAS SEULEMENT

H262 Tome 1.

Prérequis : Réduction de $SO_3(\mathbb{R})$, les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, $Z(SO_3(\mathbb{R}))=\{I_d\}$.

Thm : $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple connexe et compact.

Dém : **Etape 1 : $SO_3(\mathbb{R})$ est compact** même preuve pour $SO_n(\mathbb{R})$

$SO_3(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\{I_3\}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ est fermé dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où $\psi : M \mapsto {}^tMM$ est continue et dét est continue.
$SO_3(\mathbb{R}) \subset O_3(\mathbb{R})$ borné car constitué d'éléments de norme 1 pour la norme subordonnée $|||\cdot|||_2$.
Or $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc $SO_3(\mathbb{R})$ est compact.

Etape 2 : $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs donc connexe. même preuve pour $SO_n(\mathbb{R})$

Soit $M \in SO_3(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ tq $M = PU_\theta P^{-1}$ où $U_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
On pose $\gamma : [0,1] \to SO_3(\mathbb{R})$, $t \mapsto PU_{t\theta}P^{-1}$ est un chemin continu reliant M à I_3 et restant dans $SO_3(\mathbb{R})$. Donc $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

Etape 3 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Soit $H \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$, $H \neq \{e\}$. Montrons que $H = SO_3(\mathbb{R})$. On sait que $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.

Etape 3a : $SO_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$

Soient D et D' deux droites de $\mathbb{R}^3$, engendrées par les vecteurs unitaires d et d'.
Soient (e_1,e_2) et (e'_1,e'_2) des b.o.n de $D^\perp$ et $D'^\perp$ obtenue par l'orthonormalisat° de Gram-Schmidt.
Comme on est en dimension finie, $\mathbb{R}^3 = D \oplus D^\perp$ et $\mathbb{R}^3 = D' \oplus D'^\perp$
donc $\mathcal{B} = (d, e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (d', e'_1, e'_2)$ sont des b.o.n. de $\mathbb{R}^3$. Soit P la matrice de passage de l'une à l'autre alors $P \in O_3(\mathbb{R})$.

Quitte à changer d' en $-d'$, on peut supposer que $P \in SO_3(\mathbb{R})$ par linéarité du dét.

$$P = \begin{array}{c|ccc} & d & e_1 & e_2 \\ \hline d' & \cdot & \cdot & \cdot \\ e'_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ e'_2 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \rightsquigarrow \tilde{P} = \begin{array}{c|ccc} & d & e_1 & e_2 \\ \hline -d' & - \cdot & - \cdot & - \cdot \\ e'_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ e'_2 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \qquad \det \tilde{P} = -\det P$$

Etape 3b : Les retournements de $\mathbb{R}^3$ sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$. ~H262 p239

Soient R_D et $R_{D'}$ deux retournements de $\mathbb{R}^3$ d'axe respectif D et D'. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\leftarrow D$

D'après l'étape 3a, il existe $S \in SO_3(\mathbb{R})$ envoyant D sur D'.

$SR_DS^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$ est semblable à R_D, c'est un retournement de $\mathbb{R}^3$

Soit $x \in D'$, $SR_D\underbrace{S^{-1}x}_{\in D} = SS^{-1}x = x$ car R_D laisse fixe les éléments de D.

donc SR_DS^{-1} laisse fixe D' donc $SR_DS^{-1} = R_{D'}$.

Donc les retournements sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$.

Etape 3c H contient un retournement. H262 p239

Soit $h \in H$ $h \neq I_3$. On pose $\varphi : SO3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \longmapsto Tr(ghg^{-1}h^{-1})$ polynomiale en les coeff de g continue donc $\varphi(SO3(\mathbb{R}))$

est un compact connexe de $\mathbb{R}$ i.e un segment.

Or $\forall g \in SO3(\mathbb{R})$, $ghg^{-1}h^{-1} \in SO3(\mathbb{R})$ donc $\varphi(g) = 1 + 2\cos\theta \in [-1, 3]$, pour un $\theta \in \mathbb{R}$

Et $\varphi(I_3) = Tr(I_3) = 3$ donc $\varphi(SO3(\mathbb{R})) = [a, 3]$ où $a \in \mathbb{R}$ $a \geq -1$ ← fermé car compact

Par l'absurde, supposons $a = 3$ alors $\forall g \in SO3(\mathbb{R})$ $Tr(ghg^{-1}h^{-1}) = 3$ et donc $ghg^{-1}h^{-1} = I_3$ (car $\cos\theta = 1$)

donc $h \in Z(SO3(\mathbb{R})) = \{I_3\}$. $\overset{3}{↯}$ donc $a < 3$.

Comme $(1 + 2\cos\frac{\pi}{n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 3$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $a < 1 + 2\cos\frac{\pi}{n_0} < 3$.

Par TVI, on peut choisir $g_0 \in SO3(\mathbb{R})$ tq $\varphi(g_0) = 1 + 2\cos\frac{\pi}{n_0}$. Alors $h_{n_0} = g_{n_0} h g_{n_0}^{-1} h^{-1} \in H$

car $H \triangleleft SO3(\mathbb{R})$ et $h \in H$. De plus $Tr(h_{n_0}) = 1 + 2\cos\frac{\pi}{n_0}$ donc h_{n_0} est une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{n_0}$. Ainsi $h_{n_0}^{n_0} \in H$ est une rotation d'angle π i.e un retournement.

Etape 3d Conclusion.

Comme les retournements sont conjugués dans $SO3(\mathbb{R})$ et que $H \triangleleft SO3(\mathbb{R})$ alors H les contient tous puisqu'il en contient un.
Or les retournements engendrent $SO3(\mathbb{R})$ donc $H = SO3(\mathbb{R})$.

$n \geq 2$ $Z(SOn(\mathbb{R}))$: Soit $h \in Z(SOn(\mathbb{R}))$. Soit D une droite de $\mathbb{R}^n$, on a
$R_{h(D)} = h R_D h^{-1} \underset{h \in Z}{=} R_D$ donc h laisse stable toutes les droites de $\mathbb{R}^n$

donc $h = \lambda id$. Or $h \in SOn(\mathbb{R})$ donc $\lambda^n = 1$

⟵ soit e_1 et e_2 non colinéaire $h(e_1) = a_1 e_1$ $h(e_2) = a_2 e_2$
$h(e_1 + e_2) = a_3(e_1 + e_2) = a_1 e_1 + a_2 e_2$ $\longrightarrow a_3 = a_1 = a_2 = \lambda$
donc $\exists \lambda$ $\forall x \in E$ $h(x) = \lambda x$