changer la notation $\hat{f}$ en $\tilde{f}$

B 15min

Théorème de Riesz-Fischer - 1907

(Rudin Analyse complexe p83)
Brezis p58. Analyse fonctionnelle

$\mathcal{L}^p$ p10.

Contexte : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Prérequis : Pour $1 \leq p \leq \infty$, déf de $\mathcal{L}^p(\mu)$ (muni de $\|\cdot\|_p$ est un e.v. semi-normé), déf de $L^p(\mu)$ (muni de $\|\cdot\|_p$) est un evn).
Lemme de Fatou, inégalité de Minkowski.

À quoi sert la complétude des L^p ?

Théorème : Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.

Dém : 1er cas : $L^\infty(\mu)$ est complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(\mu)$. alors,

$$\forall k\in\mathbb{N}^* \; \exists N_k\in\mathbb{N} \; \forall m,n \geq N_k, \; \|f_n - f_m\|_\infty \leq 1/k.$$

Donc il existe une famille $(E_{k,m,n})_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'ensemble μ-négligeables tq.

(déf de $\|\cdot\|_\infty$)

$$\forall k\in\mathbb{N}^* \; \exists N_k\in\mathbb{N} \; \forall m,n \geq N_k \; \forall x\in X\setminus E_{k,m,n} \; |f_n(x) - f_m(x)| \leq 1/k$$

On pose $E = \bigcup_{k,m,n\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}} E_{k,m,n}$, union dénombrable d'ens négligeables d'où négligeable.

d'où $\forall k\in\mathbb{N}^* \; \exists N_k\in\mathbb{N} \; \forall m,n \geq N_k \; \forall x\in X\setminus E \; |f_n(x) - f_m(x)| \leq 1/k$. $(*)$

d'où $\forall x\in X\setminus E \; \forall k\in\mathbb{N}^* \; \exists N_k\in\mathbb{N} \; \forall m,n \geq N_k \; |f_n(x) - f_m(x)| \leq 1/k$.

autrement dit $\forall x\in X\setminus E$ $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. $\forall \varepsilon>0 \; \exists k\in\mathbb{N}^* \; 1/k \leq \varepsilon$.

Comme $\mathbb{C}$ est complet, cette suite converge, on note $f(x)$ sa limite. f est donc définie μ-p.p. Or a f est mesurable comme limite p.p. de fonctions mesurables.

Dans $(*)$, on passe à la limite $m \to +\infty$:

$$\forall k\in\mathbb{N}^* \; \exists N_k\in\mathbb{N} \; \forall n \geq N_k \; \forall x\in X\setminus E \; |f_n(x) - f(x)| \leq 1/k.$$

d'où $\forall k\in\mathbb{N}^* \; \exists N_k\in\mathbb{N} \; \forall n \geq N_k \; \|f_n - f\|_\infty \leq 1/k$ car $\mu(E) = 0$.

d'où $f_n - f \in L^\infty(\mu)$ et comme L^∞ est un espace vectoriel, $f = f - f_n + f_n \in L^\infty(\mu)$.

et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

2ème cas : $L^p(\mu)$ est complet pour $1 \leq p < \infty$. L^p p10

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $L^p(\mu)$. On va mq il existe une sous suite qui converge dans $L^p(\mu)$

$$\forall \varepsilon>0, \; \exists N_\varepsilon \geq 0 \; \forall n,m \geq N \; \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, si on arrive à le montrer alors $\exists k_0 \geq 0\ \forall k \geq k_0\ \|f_{n_k} - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$

et $\exists N_0 \geq 0\ \forall m, n \geq N_0\ \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $N = \max(k_0, N_0)$ alors

$\forall n \geq N\ \|f - f_n\|_p \leq \varepsilon$.

On sait que $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N_k\ \forall n \geq N_k\ \forall q \geq 0\ \|f_{n+q} - f_n\|_p \leq 1/2^k$. donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

strictement croissante tq $\forall k \geq 1\ \|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_p \leq 1/2^k$. On note $\hat{f}_k = f_{\varphi(k)}$

$\varphi(0) = N_0$ et si φ construite jusqu'au rang k, $\varphi(k+1) = \max(\varphi(k), N_{k+1})$.

On aimerait considérer $f = \sum_{n=0}^{+\infty} (\hat{f}_{n+1} - \hat{f}_n) + \hat{f}_0$ mais on doit vérifier son existence.

On note $g_k = \sum_{j=0}^{k} |\hat{f}_{j+1} - \hat{f}_j|$ et $g = \sum_{j=0} |\hat{f}_{j+1} - \hat{f}_j|$, elles sont mesurables et

$g_k \in \mathcal{L}^p$ car $\hat{f}_n \in \mathcal{L}^p$

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{j=0}^{k} \|\hat{f}_{j+1} - \hat{f}_j\|_p \leq \sum_{j=0}^{k} 1/2^j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} 1/2^j < +\infty.$$

donc d'après le lemme de Fatou,

$$\int_E g(t)^p \, d\mu = \int_E \liminf_{k \to +\infty} g_k(t)^p \, d\mu \leq \liminf_{k \to +\infty} \|g_k\|_p^p < +\infty.$$

d'où g^p est intégrable donc elle est finie μ p.p. donc g aussi.

$\mu(|h| \geq n) \leq \frac{\|h\|_1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\mu(h = \pm\infty) = \mu(\bigcap_n \downarrow \{|h| \geq n\}) = \lim_{n \to +\infty} \mu(|h| \geq n) = 0$

On note N le négligeable sur lequel ce n'est pas fini alors pour tout $t \in X = E \setminus N$,

$\sum_{n=0}^{+\infty} (\hat{f}_{n+1}(t) - \hat{f}_n(t))$ converge absolument donc converge car $\mathbb{C}$ est complet

On pose $f(t) = \begin{cases} \hat{f}_0(t) + \sum_{k=0}^{+\infty} (\hat{f}_{k+1}(t) - \hat{f}_k(t)) & \text{si } t \in X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ bien définie par ce qu'on vient de voir.

f est mesurable comme limite p.p de fonctions mesurables

et $\sum_{k=0}^{N} \hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k + \hat{f}_0 = \hat{f}_{N+1}$ or pour tout $t \in X$, le terme de gauche converge donc celui de droite

aussi et $f(t) = \lim_{k \to +\infty} \hat{f}_k(t)$ pour tout $t \in X$.

Il reste à montrer que $\hat{f}_n$ converge vers f dans $\mathcal{L}^p$. $\forall k \geq N_\varepsilon$

On a $\int_X |f - \hat{f}_k|^p \, d\mu = \int_X \liminf |\hat{f}_m - \hat{f}_k|^p \, d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \int_X |\hat{f}_m - \hat{f}_k|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p$

car (f_n) de Cauchy donc $(\hat{f}_n)$ aussi.

d'où $f - \hat{f}_k \in \mathcal{L}^p$ pour $k \geq N$ donc $f \in \mathcal{L}^p$ car sev. Et comme on a l'inégalité pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, $\|f - \hat{f}_k\|_p \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

f mesurable comme limite p.p de fonctions mesurables :

1ère méthode : $f_n \to f$ sur A avec A^c négligeable d'où $f_n \mathbb{1}_A \to g$ partout donc
g mesurable comme limite de fct° mesurables or $g = f$ p.p. donc $g = f$ dans L^p
On peut donc choisir un représentant mesurable.

2e méthode : $f_n \to f$ sur A avec A^c négligeable $g = f \mathbb{1}_A$ mesurable car tribu de Lebesgue est complète

Frigyes Riesz (1880-1956) mathématicien hongrois. Un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle à l'origine du thm de compacité de Riesz et du thm de représentation de Riesz.

Ernst Fischer (1875-1954) mathématicien autrichien qui a travaillé à la fois en analyse et en algèbre. a introduit la notion de cv en moyenne quadratique.