REDUCTION DES ENDOMORPHISMES NORMAUX — Gourdon Algèbre p254

choisir entre L1+2 et L3.

Prérequis : × Sp(endo sym) ⊂ ℝ $\lambda\|x\|^2 = \langle Mx, x\rangle = \langle x, Mx\rangle = \langle \overline{M}x, x\rangle = \bar\lambda\|x\|^2$ x vp, λ vp, $x \neq 0$ ↳ $\lambda = \bar\lambda$
× Si u et v commutent, tout sep de u est stable par v.

Déf : Soit E un espace hermitien. $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si u et u^* commutent.

Soit E un espace hermitien de dimension n.

Lemme 1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Dém : Soit $x \in F$ alors $u(x) \in F$ d'où $\forall y \in F^\perp$ $0 = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$
C'est vrai pour tout x donc $u^*(y) \in F^\perp$ d'où $F^\perp$ est stable par u^*.
Soit $y \in F^\perp$ alors $\langle x, u^*(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = 0$ pour tout $x \in F$ car $u(x) \in F$ donc $u^*(y) \in F^\perp$

Lemme 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, si E_λ est un sous espace propre de u (associé à la vp λ) alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Dém : Comme u et u^* commutent, E_λ est stable par u^* et donc $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$ d'après le lemme 1

On s'intéresse maintenant au cas réel : E euclidien

Lemme 3 : Soit E un espace euclidien de dim 2 ; $u \in \mathcal{L}(E)$ normal sans vp réelles. Alors dans toute b.o.n de E $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

Dém : Soit B une b.o.n. On écrit $M = Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

On a $b \neq 0$ car u est sans vp réelle
vrai car ${}^t M = Mat(B, u^*)$ car B b.o.n.
De plus $M^* M = M M^*$ d'où $a^2 + c^2 = a^2 + b^2$ et $ab + cd = ac + bd$.
d'où $b = \pm c$.
• Si $b = c$ alors M est symétrique réelle or $Sp_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$ Absurde.
• donc $b = -c$. et donc la 2° équation donne $2(a-d)b = 0$ d'où $a = d$ car $b \neq 0$.

Théorème : Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une b.o.n B de E tq

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Dém : On procède par récurrence forte sur $n = \dim(E)$

• Pour $n = 1$, le résultat est trivial.
• Soit $n \geq 2$ On suppose le résultat vrai pour tout espace euclidien de dimension inférieure à $n-1$. Soit E un espace euclidien de dimension n. et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal
On a deux cas :

→ Cas 1 : $Sp_{\mathbb{R}}(u) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(u)$. On considère alors $E_\lambda = \ker(\lambda Id_E - u)$ ↳ stable par u.
et $F = E_\lambda^\perp$.
F est stable par u (lemme 2) et par u^* (lemme 1 car E_λ stable par u)
$u^*_{|F}$ existe, par unicité de l'adjoint on mq $u^*_{|F} = (u_{|F})^*$ or u et u^* commutent d'où $u_{|F}$ et $(u_{|F})^*$ aussi donc $u_{|F}$ est normal. Comme $\dim F \leq n-1$, par hypothèse de récurrence, il existe B_2 une b.o.n de F tq $Mat_{B_2}(u_{|F})$ soit de la forme demandée.
Soit B_1 une b.o.n de E_λ (dim finie donc existe + Gram Schmidt), $B = (B_1, B_2)$ est une b.o.n de E tq $Mat_B(u)$ soit de la forme souhaitée. $E = F^\perp \oplus F$ car dim < ∞
car E_λ stable par u

9' → Cas 2 : $Sp_{\mathbb{R}}(u)=\emptyset$.

alors Π_u a un facteur irréductible de degré 2 dans $\mathbb{R}[X]$: $Q=X^2+\alpha X+\beta$.

- On note $N=\ker Q(u)$.

× $N\neq\{0\}$: $Q=(X-\lambda)(X-\bar\lambda)$ où $\lambda\in\mathbb{C}$, dans $\mathbb{C}[X]$. d'où $\lambda\in Sp_{\mathbb{C}}(u)$ donc $\det(\lambda Id-u)=0$.
donc ... $\det Q(u)=\det(u-\lambda Id)(\det(u-\bar\lambda Id))=0$. donc $N\neq\{0\}$

× N est stable par u car Q(u) polynôme en u.
× N est stable par u^* car $u^*Q(u)=Q(u)u^*$ car $uu^*=u^*u$.

} ⟹ $(u_{|N})^*=(u^*)_{|N}$ (lemme inversible)

On pose $v=u_{|N}$, on a $v^*=u^*_{|N}$ d'où $v^*v=(u^*u)_{|N}$ est symétrique réel. donc $Sp_{\mathbb{R}}(v^*v)\neq\emptyset$
Soit $\mu\in Sp_{\mathbb{R}}(v^*v)$. Soit $x\in N\setminus\{0\}$ un vp de v^*v associé à μ.

- On pose $F=Vect(x,u(x))$. Comme $Sp_{\mathbb{R}}(u)=\emptyset$, $(x,u(x))$ forme une famille libre sur $\mathbb{R}$ donc $\dim F=2$.

$(u_{|F})^*=(u^*)_{|F}$ ⟸ {
× F est stable par u : $u^2(x)=-\alpha u(x)-\beta x\in F$ car $x\in N$
× F est stable par u^* : $u^2(x)=-\alpha u(x)-\beta x \Rightarrow F=Vect(u(x),u^2(x))$ car $\beta\neq0$
$u^*u(x)=v^*v(x)=\mu x\in F$.
}

Or u et u^* commutent d'où $u^*u^2(x)=u\circ u^*(u(x))=u(\mu x)=\mu u(x)\in F$.
Donc $u_{|F}$ est normal donc par le lemme 3, ~~il existe~~ (on peut trouver) B_2 une b.o.n de F tq
$Mat_{B_2}(u_{|F})=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$ * $Sp_{\mathbb{R}}(u_{|F})=\emptyset$ car $Sp_{\mathbb{R}}(u)=\emptyset$
car $\Pi_{u_{|F}}\mid\Pi_u$: si Π_u n'a pas de racine réelle alors $\Pi_{u_{|F}}$ non plus.

× $F^\perp$ stable par u : F stable par u^* + lemme 1.
× $F^\perp$ stable par u^* : F stable par u + lemme 1.
Donc $u_{|F^\perp}$ est normal
Or $\dim(F^\perp)=n-2$ donc par hypothèse de récurrence, il existe B_1 b.o.n de $F^\perp$ tq $Mat_{B_1}(u_{|F^\perp})$ soit la bonne forme.

Donc la base $B=(B_1,B_2)$ est une b.o.n de E dans laquelle la matrice de u a la bonne forme.

L 14'43

Questions : A-t-on unicité ?

Corollaire : (Thm spectral) : Soit E un espace euclidien (ou hermitien) et $u\in\mathcal{L}(E)$ auto-adjoint ($u=u^*$). alors il existe une b.o.n. de vp de u et les vp de u sont réelles

Corollaires : Réduction des matrices antisymétriques.
Réduction des isométries.
) voir dvlpt de Lecerau