SUITE DE POLYGONES.

• sans ref pr thm

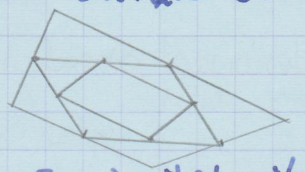
• Gourdon Alg p 146 pour det circulant

Prérequis • χ_A scindé à racines simples $\Rightarrow A$ diag

6 min ~~[illegible]~~ discriminant

15'17 total pour 15'2

Thm = Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ n points du plan complexe donnés par leur affixe. Ils définissent, dans cet ordre, un polygone P donné par la liste de ses sommets.
On définit alors par récurrence une suite de polygones (P_k) avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.
Alors $(P_k)_{k \geq 0}$ converge vers l'isobarycentre de P.



Dém : * On représente P_k par le n-uplet $Z_k = {}^t(z_{k,1}, \dots, z_{k,n})$ il s'agit alors de montrer que $(Z_k)_{k\geq 0}$ converge vers $(g, \dots, g)$ où g est l'isobarycentre de P.

La relation de récurrence entre Z_{k+1} et Z_k s'écrit

$Z_{k+1} = {}^t\left(\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \dots, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2}\right)$. Ce qui se réécrit matriciellement $Z_{k+1} = A Z_k$

avec $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & & & 1/2 \end{pmatrix}$. Par récurrence immédiate, on obtient $\begin{cases} Z_0 = (z_1, \dots, z_n) \\ \forall k \geq 1 \ Z_k = A^k Z_0 \end{cases}$

* Il suffit alors de montrer que la suite (A^k) converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour cela, on étudie son spectre.

$\chi_A(X) = \det(A - X\mathrm{id}) = \begin{vmatrix} 1/2 - X & 1/2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & & & 1/2 - X \end{vmatrix}$. On reconnait un déterminant

circulant avec $a_0 = 1/2 - X$, $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_i = 0$ pour $i \geq 2$

donc $\chi_A(X) = \prod_{j=0}^{n-1} (a_0 + a_1 \omega^j)$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

$= \prod_{j=0}^{n-1} \left(1/2 - X + \frac{1}{2}\omega^j\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1 + \omega^j}{2} - X\right)$. On pose pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, $y_j = \frac{1+\omega^j}{2}$

* Comme $y^k = y^j \iff \omega^k = \omega^j \iff k = j$, χ_A est scindé à racines simples et donc A est diagonalisable : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1} \mathrm{diag}(y_j) P$.

Or pour $j \neq 0$, $|y_j| = \left|\frac{1 + \omega^j}{2}\right| = \left| e^{\frac{i\pi j}{n}} \cdot \frac{e^{-\frac{i\pi j}{n}} + e^{\frac{i\pi j}{n}}}{2} \right| = \left|\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right| < 1$ et $y_0 = 1$

et comme pour tout $k \geq 0$ $A^k = P D^k P^{-1}$,

$A^k \longrightarrow \underbrace{P^{-1} \mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0) P}_{:= B}$ par continuité de $M \mapsto P^{-1} M P$.

On a donc $A^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} B$, $Z_k = A^k Z_0 \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} B Z_0 := C$

* Or $Z_{k+1} = A Z_k$ d'où en passant à la limite, $C = AC$.

Or A a pour valeur propre 1 et le sep associé est de dimension 1 et contient $(1, \dots, 1)$

donc $E_1 = \mathrm{Vect}((1,\dots,1))$ d'où il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $C = (a,\dots,a)$.
Cela signifie que P_n converge vers le point d'affixe a.
Il reste à montrer que $a = g$.

On note g_n l'isobarycentre de P_n, on a alors pour $k \geq 0$.

$$g_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{n+1,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{z_{n,i}+z_{n,i+1}}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} z_{n,i} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} z_{n,i+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{n,i} = g_n$$

donc pour tout $k \geq 0$ $g_{n+1} = g_n = g_0 = g$

Donc $g = g_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{n,i} \longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = a$ donc $g = a$.

$\llcorner$.

Formule du déterminant circulant (à faire avant)

Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$ alors $\det A = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$.

Dém: . En notant $A = (a_{ij})$ on a $a_{ij} = a_{j-i}$.

. On introduit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \omega \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$

alors $(AM)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{k-i}\, \omega^{(k-1)(j-1)} = \omega^{(i-1)(j-1)} \sum_{k=1}^{n} a_{k-i}\, \omega^{(k-i)(j-1)}$

$= \omega^{(i-1)(j-1)} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell (\omega^{j-1})^\ell$ en réordonnant les termes de la somme.

$= \omega^{(i-1)(j-1)} P(\omega^{j-1})$

donc $AM = \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & \cdots & P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \omega P(\omega) & & \omega^{n-1}P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(1) & \omega^{n-1}P(\omega) & & \omega^{(n-1)^2}P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$

Ainsi, $\det(AM) = P(1)P(\omega)\cdots P(\omega^{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots\ \omega & & \omega^{n-1} \\ 1\ \omega^{n-1} & & \omega^{(n-1)^2} \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j) \det M$

$\det A \det M$ ″ ↑ par multilinéarité du déterminant

Or $\det M \neq 0$ car c'est un déterminant de Vandermonde. Donc $\det A = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$.

$\llcorner$

Bonus pour la leçon Barycentres: On se demande maintenant ce que ça donnerait si on ne prend plus le milieu des arêtes mais un point quelconque. Plus précisément, soit $t \in]0,1[$, on définit
Le barycentre de deux sommets successifs

$$z_{n+1} = \left(t z_{n,1} + (1-t) z_{n,2}, \dots, t z_{n,n} + (1-t) z_{n,1}\right)$$

En reprenant la progression qu'on a faite au par avant (avec $t = 1/2$), on a $A_t = \begin{pmatrix} t & 1-t & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 1-t \\ 1-t & & & & t \end{pmatrix}$

donc $\chi_{A_t}(X) = \prod_{j=0}^{n-1} (t + \omega^j - t\omega^j - X)$ par formule du déterminant circulant.

Si on note toujours $y_j = t + \omega^j - t\omega^j$ les racines de A_t, on remarque comme précedemment qu'elles sont deux à deux distinctes car $t \in]0,1[$.

donc A est diagonalisable : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}\,\mathrm{diag}(y_j)\,P$.

Or pour $j \neq 0$, $|y_j| = |t + (1-t)\omega^j| \leq t + (1-t)|\omega^j| \leq 1$ par I.T. $(y_0 = 1)$

Or si $|y_j| = 1$ alors on a le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $(1-t)\omega^j = \lambda t$ (car $t \neq 0$ et $(1-t)\omega^j \neq 0$)

donc $\omega^j = \dfrac{\lambda t}{1-t} \in \mathbb{R}$. donc $j = 0$.

Donc pour $j \neq 0$, $|y_j| < 1$. On refait donc exactement la même chose que dans le cas des milieux.

Il ne reste qu'à vérifier que $g_{k+1} = g_k$ pour $k \geq 0$:

$$g_{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{k+1,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t z_{k,i} + (1-t) z_{k,i+1}$$

$$= \frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{k,i} + \frac{(1-t)}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{k,i+1} = \frac{t+(1-t)}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{k,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{k,i} = g_k.$$

On peut donc conclure de même.

Et on s'aperçoit qu'on a le même résultat que pour $t = 1/2$!

<u>Bonus sur les polygones des milieux :</u>

On reprend la matrice A alors A est la matrice qui à un polygone associe son polygone des milieux.

On se demande si étant donné un polygone, il existe toujours un polygone dont c'est le polygone des milieux : est-ce que A est surjective ? i.e. injective car on est en dim finie

On a $Sp(A) = \left\{ \dfrac{1+\omega^j}{2}, j \in [\![0, n-1]\!] \right\}$

On a $1 + \omega^j = 0$ ssi $\omega^j = -1$ ssi $\dfrac{2i\pi j}{n} = i\pi$ ssi $2j = n$ ssi n est pair

<u>Ccl</u> :
- Si n est impair, $0 \notin Sp(A)$ donc A est surjective
- Si n est pair, $0 \in Sp(A)$, c'est une vp simple donc $\dim \ker A = 1$ donc $\mathrm{rg}\, A = n-1$.

donc $\mathrm{Im}\, A$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle $(x_1, \dots, x_n)$
$Y \in \mathrm{Im}\, A$ ssi $(x_1, \dots, x_n) Y = 0$.

Reste à trouver $(x_1, \dots, x_n)$ ... On peut montrer (comment ?) que $(x_1, \dots, x_n) = (-1, +1, -1, \dots)$ donc $Y \in \mathrm{Im}\, A$ ssi le barycentre du polygone constitué des sommets pairs de Y coïncide avec celui des coefficients impairs

Si on connait un sommet A_1 du polygone initial et le polygone Y des milieux alors on peut reconstruire le polygone initial : A_{i+1} est le symétrique de A_i par rapport à Y_i. donc $f = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1$ où s_i est la symétrie par rapport à Y_i.

↪ si n est impair, c'est la composée de n symétries donc c'est une symétrie centrale. On prend le point fixe pour pt de départ

↪ si n est pair, f est une translation. On a deux cas

- si $f = Id$ – quel que soit le pt de départ on a trouvé un polygone qui convient.
- sinon f n'a aucun point fixe donc y a pas de solution

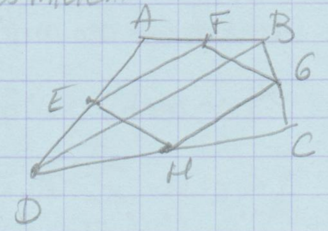
Construction – En partant d'un pt quelconque B_1 on construit son symétrique B_2 p/r à M_1 puis B_3 de B_2 par rapport à M_2 ... puis B_1' de B_n par rapport à M_n.

→ si $B_1 = B_1'$ c'est bon !

→ si $B_1 \neq B_1'$: si n est impair on reprend en partant de A_1 milieu de $[B_1, B_1']$ et ça marchera
Si n est pair Impossible

Prop = Le polygone des milieux de n'importe quel quadrilatère est un parallélogramme.

Dém : On note $ABCD$ un quadrilatère. $EFGH$ son polygone des milieux



Par propriété de la droite des milieux, $(DB)//(EF)$
et $(GH)//(DB)$ donc $(FE)//(GH)$
De même $(EH)//(FG)$
$EFGH$ est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles, c'est donc un parallélogramme