NOMBRES DE BELL

FGN Alg 1 p 12

15 min large
16 min...
13 min normal

Prérequis
- série entière = rayon de convergence, dérivation, produit de Cauchy, unicité DSE
- famille sommable
- équation différentielle d'ordre 1

Déf : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$, avec par convention $B_0 = 1$.

Étape 1 : Relation de récurrence

Lemme (Relation de récurrence) : On a $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. $\forall n \in \mathbb{N}$

Dém : $B_1 = 1$, $B_2 = 2$: $\{1,2\} = \{1\} \sqcup \{2\}$

$B_3 = 5$: $\{1\,2\} \sqcup \{3\} = \{1\} \sqcup \{2\} \sqcup \{3\} = \{2\} \sqcup \{1,3\} = \{1\} \sqcup \{2,3\} = \{1,2,3\}$.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note E_k l'ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$ tq la partie contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$.
Les E_k sont disjoints et $\bigsqcup_{k=0} E_k$ est l'ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$.

(On a mis toutes les façons possibles de couper $[\![1,n+1]\!]$).

Donc $B_{n+1} = \left|\bigsqcup_{k=0}^{n} E_k\right| = \sum_{k=0}^{n} |E_k|$

Or $|E_k| = \binom{n}{k} B_{n-k}$ car pour constituer la partie contenant $n+1$, il nous faut choisir k éléments de $[\![1,n]\!]$ puis réaliser une partition des $n-k$ restants.

D'où $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j$ car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Étape 2 : Rayon de convergence de la série génératrice.

On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ série génératrice exponentielle de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$

On ne pose pas $\sum_{n=0}^{+\infty} B_n z^n$ car on aura plus de mal à faire apparaître un produit de Cauchy, comme on a un coefficient binomial dans la relation de récurrence

On va montrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ que $B_n \leq n!$:
- $n=0$ ok
- Si pour tout $k \leq n$ $B_k \leq k!$ alors

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{B_k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\leq 1} \leq (n+1)!$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\frac{B_n}{n!} \leq 1$. d'où par comparaison des séries à termes positifs, $R \geq 1$ car $\sum z^n$ converge pour $|z| < 1$.

Étape 3 : Équation différentielle et produit de Cauchy.

Soit $x \in]-R, R[$. $f(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}$ et f est dérivable sur $]-R, R[$

avec $f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n$.

On a $f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right]x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!}\frac{1}{(n-k)!}\right)x^n$.

$=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right)$ par produit de Cauchy de deux séries cv absolument sur $]-R,R[$.

$=f(x)e^x$.

D'où $f'(x)=f(x)e^x$. d'où il existe $C\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in]-R,R[$ $f(x)=Ce^{e^x}$

Or $f(0)=B_0=1$ d'où $C=1/e$. Donc pour tout $x\in]-R,R[$, $f(x)=\frac{1}{e}e^{e^x}$.

Etape 4: Unicité du développement en série entière.

La fonction exponentielle est une série entière de rayon de cv infinie par d'Alembert

d'où pour tout $z\in\mathbb{C}$ $e^{e^z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(e^z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{nz}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(nz)^k}{k!}$

On pose $u_{n,k}=\frac{(nz)^k}{n!k!}$, $k,n\in\mathbb{N}$.

On a pour $n\in\mathbb{N}$ partition $=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}\times\mathbb{N}=\mathbb{N}^2$

$\sum_{k=0}^{+\infty}|u_{n,k}|=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|nz|^k}{n!k!}=\frac{e^{|nz|}}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{|nz|}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(e^{|z|})^n}{n!}=e^{e^{|z|}}$.

ou Fubini pour la mesure de comptage

Donc par théorème de sommation par paquets, la famille $(|u_{n,k}|)_{n,k\in\mathbb{N}}$ est sommable d'où $(u_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ aussi. On peut donc changer l'ordre de sommation:

$\forall x\in]-R,R[$ $\frac{1}{e}e^{e^x}=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}\right)\frac{x^k}{k!}$

Donc par unicité du développement en série entière de f,

pour tout $k\in\mathbb{N}$ $B_k=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}\in\mathbb{N}$

Rq = C'est le moment d'ordre n d'une loi de poisson de paramètre 1.

→ Pour calculer les B_n = il vaut mieux utiliser la relation de récurrence obtenue à l'étape 1.

→ On ne peut pas utiliser les séries formelles car $f\circ g$ n'existe que si $g(0)=0$ or $\exp(\exp(X))-\exp(0)\neq 0$.