8 MÉTHODE DE NEWTON. Rouvière p152

Prérequis : Taylor Lagrange, continuité et limite de suites, toute suite décroissante minorée converge, thm des gendarmes

13'

Thm : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ s'annulant en un unique point a avec $c<a<d$, et telle que $f' > 0$ sur $[c,d]$.

On définit $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors

1)* il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$ soit stable par φ et que la suite récurrente définie par $\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = \varphi(x_n), n \geq 0 \end{cases}$ converge vers a.

Cette convergence est d'ordre au moins 2 : $\exists C > 0 \ \forall n \geq 0 \ |x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$.

si f convexe, pas besoin d'être proche de a.

2)* Si de plus, $f'' > 0$ sur $[c,d]$, alors $I = [a,d] \subset [c,d]$ est stable par φ et pour $x_0 \in I$, la suite (x_n) est soit cste soit strictement décroissante et on a une convergence à l'ordre 2 exactement si $x_0 \neq a$:

$$x_{n+1} - a \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)} (x_n - a)^2$$

Dém : 1)* Pour $x \in [c,d]$, on a $\varphi(x) - a = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)}$ car $f(a) = 0$

$$= \frac{f(a) - f(x) - (a-x) f'(x)}{f'(x)}$$

D'après la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2 entre x et a, il existe $z_x \in]x,a[$ (∧) tq
$$f(a) = f(x) + (a-x) f'(x) + f''(z_x) \frac{(a-x)^2}{2}$$

donc $\varphi(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z_x)}{f'(x)} (x-a)^2$

On pose $C = \frac{\max_{[c,d]} |f''|}{2 \min_{[c,d]} |f'|}$ alors $|\varphi(x) - a| \leq C|x-a|^2$.

* Soit $\alpha > 0$ tq $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$ et $C\alpha < 1$. Alors, $\forall x \in I \ |\varphi(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha$ d'où $\varphi(I) \subset I$. On peut alors définir la suite $\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = \varphi(x_n), n \geq 0 \end{cases}$

* $\forall n \geq 0 \ |x_{n+1} - a| = |\varphi(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2 \leq \frac{1}{C} [C|x_0 - a|]^{2^{n+1}}$ par récurrence

$$\leq \frac{1}{C} (C\alpha)^{2^{n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ car } C\alpha < 1$$

On a donc bien la convergence d'ordre au moins 2 de (x_n) vers a

2) Maintenant $I=[a,d]$ et on a $f''>0$. donc f' est croissante et f convexe

→ si $x_0=a$ alors la suite est constante
→ on suppose donc $x_0>a$.

* On a pour $x\in]a,d]$, $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}<x$ car $f'>0$ donc f est croissante or $f(a)=0$ donc $f>0$ sur $]a,d]$

* et pour $x\in]a,d]$, $\varphi(x)-a=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2>0$ comme en 1)

Donc $\forall x\in]a,d]$ $a<\varphi(x)<x\leq d$ donc I est stable par φ et la suite (x_n) est strictement décroissante.
Or (x_n) est minorée par a donc elle converge, on note l sa limite

Or $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ implique en passant à la limite, par continuité de φ que $l=\varphi(l)$
i.e. $f(l)=0$ donc par unicité du point d'annulation de f, $a=l$
Donc (x_n) converge vers a.

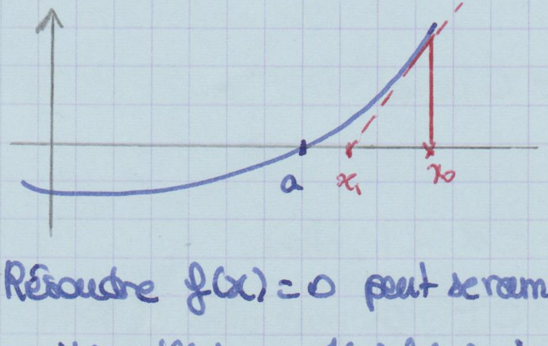
* Par l'égalité de Taylor Lagrange à l'ordre 2 sur $]a,x_n[$, $n\in\mathbb{N}$, il existe $z_n\in]a,x_n[$ tq on ait comme en 1)

$$x_{n+1}-a=\frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(x_n-a)^2.$$

Or $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ donc $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ par théorème des gendarmes donc par continuité de f' et f'',

$$\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{f''(a)}{f'(a)} \text{ d'où } x_{n+1}-a\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n-a)^2.$$

<u>Interprétation</u> : • $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ se réécrit en $f(x_n)+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)=0$.
donc x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de la tangente de f en x_n avec l'axe des abscisses.



• Résoudre $f(x)=0$ peut se ramener à une étude de point fixe $\varphi(x)=x$. On peut considérer $\varphi(x)=x+\lambda(x)f(x)$ où λ ne s'annule pas.

Cv des itérés est très rapide si le point est super attractif i.e. $\varphi'(a)=0$.
⇝ $\lambda(x)=-\dfrac{1}{f'(x)}$. On retrouve la méthode de Newton.

<u>NB</u> = Si $f'<0$ on prend $I=[c,a]$ dans 2)