ELLIPSOÏDE DE JOHN LOEWNER

Oraux X-ENS Algèbre 3
p228-229

choisir entre étape 1 et 2 ou 9.

Prérequis : • diagonalisation en b.o.n de $S_n(\mathbb{R})$, pseudo-réduction simultanée
• En dim finie : compact $\Leftrightarrow$ fermé borné, fct° continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes
• inégalités de convexité
• changement de base pour les formes quadratiques.

On note Q l'ensemble des formes quadratiques de $\mathbb{R}^n$
Q^+ positives de $\mathbb{R}^n$
Q^{++} définies positives de $\mathbb{R}^n$.

Si $q \in Q$, on note $D(q)$ le déterminant d'une matrice associée à q. dans une b-o-n.

Thm. Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal contenant K.

$n=3$ • Un ellipsoïde est une surface du second degré de l'espace euclidien à 3 dimensions
• un ellipsoïde admet dans un repère une équat° de la forme $\sum \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1$
• déformat° de la sphère

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle. Un ellipsoïde plein centré en O admet une équation de la forme $q(x) \leq 1$ avec $q \in Q^{++}$.
On peut donc associer à toute forme quadratique définie positive q un ellipsoïde $E_q = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leq 1\}$.

Etape 1 : Le déterminant est indépendant de la base o.n. choisie

Soit $q \in Q^{++}$, par thm spectral, il existe une b.o.n $B = (e_1, .., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tq si on pose $a_i = q(e_i)$,

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$$

Si B_1 est une b.o.n. quelconque de $\mathbb{R}^n$, si on note $S = \mathrm{Mat}_{B_1}(q)$ alors par changement de base pour les formes quadratiques, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq

$S = P \mathrm{Mat}_B(q)\,{}^tP = P\,\mathrm{diag}(a_1, .., a_n)\,{}^tP$. Comme B et B_1 sont o-n alors $P \in O_n(\mathbb{R})$

Donc $D(q) := \det S = a_1 \dots a_n$. ne dépend pas de B_1

Etape 2 : Calcul du volume de E_q. V_q

On a $V_q = \displaystyle\int_{a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\sum a_i x_i^2 \leq 1}\, dx_1 \dots dx_n$

Par le changement de variables $\varphi : x \mapsto \left(\frac{x_1}{\sqrt{a_1}}, .., \frac{x_n}{\sqrt{a_n}}\right)$ qui est un C^1 difféomorphisme de jacobien $\frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}$, on a

$$V_q = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} 1_{t_1^2 + \dots + t_n^2 \leq 1}\, dt_1 \dots dt_n = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$$

où V_0 est le volume de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Etape 3 : Reformulation du problème.

On veut montrer qu'il existe une unique $q \in Q^{++}$ tq $\mathcal{E}_q$ soit de volume minimal et contienne K.

On est donc ramené à montrer que il existe une unique $q \in Q^{++}$ tq $D(q)$ soit maximal et $\forall x \in K\ q(x) \leq 1$

On munit l'espace vectoriel Q de la norme $N : q \mapsto \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$ et on cherche à maximiser D sur l'ensemble $\mathcal{C} = \{ q \in Q^+,\ \forall x \in K\ q(x) \leq 1 \}$.

← pas Q^{++} car on n'aura pas le caractère fermé

Si $q \in \mathcal{C} \cap Q^{++}$ alors $K \subset \mathcal{E}_q$.

Etape 4 : $\mathcal{C}$ est fermé.

Soit (q_n) une suite de $\mathcal{C}$ qui converge pour la norme N dans Q vers q.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $|q_n(x) - q(x)| \leq \|x\|^2 \left| q_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - q\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq \|x\|^2 N(q - q_n)$

inégalité finale vraie pour $x = 0$.

donc $q(x) = \lim q_n(x)$ $\begin{array}{l} \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \\ \leq 1 \quad x \in K. \end{array}$ donc $q \in \mathcal{C}$

Etape 5 : $\mathcal{C}$ est borné

K est d'intérieur non vide donc il existe $a \in K$ et $r > 0$ tq $\bar{B}(a, r) \subset K$ ← quitte à diminuer r

Soit $q \in \mathcal{C}$, si $\|x\| \leq r$ alors $a + x \in K$ donc $q(a+x) \leq 1$. Or $q(-a) = q(a) \leq 1$ ← $a \in K$

Donc $\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x+a-a)} \leq \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$. donc $q(x) \leq 4$. car $q \in Q^+$

$\varphi(x,y) \overset{CS}{\leq} \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$ or $2\varphi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ d'où $q(x+y) \leq (\sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)})^2$

Si $\|x\| \leq 1$ alors $\|rx\| \leq r$ donc $|q(x)| \underset{q \in Q^+}{=} q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$

donc $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$. Donc $\mathcal{C}$ est borné pour N.

Or Q est de dimension finie donc $\mathcal{C}$ est compact

biject° entre $S_n(\mathbb{R})$ et les formes bilinéaires symétriq sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
$A \mapsto ((x,y) \mapsto \langle Ax, y \rangle)$

Etape 6 : $\mathcal{C}$ est non vide

K est compact donc borné : il existe $M > 0$ tq pour tout $x \in K$ $\|x\| \leq M$.

On pose $q_1 : x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ alors $q_1 \in Q^+$ et $\forall x \in K$ $q_1(x) \leq 1$ donc $q_1 \in \mathcal{C}$.

Etape 8 : $\mathcal{C}$ est convexe

Soient $(q, q') \in \mathcal{C}$, soit $\lambda \in [0, 1]$,

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $(\lambda q + (1-\lambda) q')(x) = \lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \geq 0$
$\forall x \in K$ $(\lambda q + (1-\lambda) q')(x) = \lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$.

donc $\mathcal{C}$ est convexe.

Etape 7 : Existence

Le déterminant étant continu, l'application D l'est également. Comme $\mathcal{C}$ est compact non vide, D y est bornée et atteint son maximum en un certain $q_0 \in \mathcal{C}$.

Comme $q_1 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{Q}^{++}$,

$$D(q_0) \geq D(q_1) = \frac{1}{M^{2n}} > 0. \text{ donc } q_0 \in \mathcal{Q}^{++}.$$

Etape 9 : Log concavité du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Si $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tq $\alpha + \beta = 1$, alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^{\alpha} (\det B)^{\beta}$

Si $A \neq B$ et ~~$\alpha, \beta \neq 0$~~ alors l'inégalité est stricte.

En effet, d'après le thm de pseudo réduction simultanée, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq

$A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On a $\lambda_i > 0$ car $\lambda_i = {}^t(P^{-1}e_i) B (P^{-1}e_i) > 0$ car $B \in S_n^{++}$ — ⚠ les λ_i ne sont pas les v.p.

donc $(\det A)^{\alpha} (\det B)^{\beta} = (\det P)^{2\alpha} (\det P)^{2\beta} (\det D)^{\beta} = (\det P)^2 \det(D)^{\beta}$.

$\det(\alpha A + \beta B) = (\det P)^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$

Donc $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^{\alpha} (\det B)^{\beta} \iff \det(\alpha I_n + \beta D) \geq \det(D)^{\beta}$

$$\iff \prod (\alpha + \beta \lambda_i) \geq \left(\prod \lambda_i\right)^{\beta} \underset{\lambda_i > 0}{\iff} \sum \ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geq \beta \sum \ln(\lambda_i)$$

Or par concavité du $\ln$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geq \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i) = \beta \ln(\lambda_i)$

Si $A \neq B$, un des λ_i est différent de 1 donc si $\alpha \in]0, 1[$ la stricte concavité du logarithme donne le résultat. $\to \ln(\alpha \times 1 + \beta \lambda_i) \underset{\lambda_i \neq 1}{>} \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i)$

Etape 10 : Unicité :

Si il existe $q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{Q}^{++}$ telle que $q \neq q_0$ et $D(q) = D(q_0)$, on note S et S_0 leur matrice respective dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $S, S_0 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Par convexité de $\mathcal{C}$, $\frac{1}{2}(q + q_0) \in \mathcal{C}$. Or

$D\left(\frac{1}{2}(q + q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S + S_0)\right) > (\det S)^{1/2} (\det S_0)^{1/2} = D(q_0)$ Ce qui contredit la maximalité de $D(q_0)$. ↯.

Rq : • Si ton K est d'intérieur vide il n'y a pas existence d'ellipsoïde de volume minimal : ex : $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$.

... dans un e.v réel de dim finie : le mettre en biject° avec $\mathbb{R}^n$.

... linéaire est forcément un

... euclidienne de E -

... tjrs symétrique -

✓ En fait, il y a deux ellipsoïdes de JOHN et LOEWNER. La première est celle dont on vient de démontrer l'existence (LOEWNER, qui ne l'a jamais publié). La deuxième (JOHN 1948) est une ellipsoïde de volume maximal contenu dans un convexe compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Elles permettent d'approximer les convexes compacts de $\mathbb{R}^n$ (en utilisant la notion de polarité, dans le cas des convexes compacts, ces ellipsoïdes peuvent se déduire l'un de l'autre).

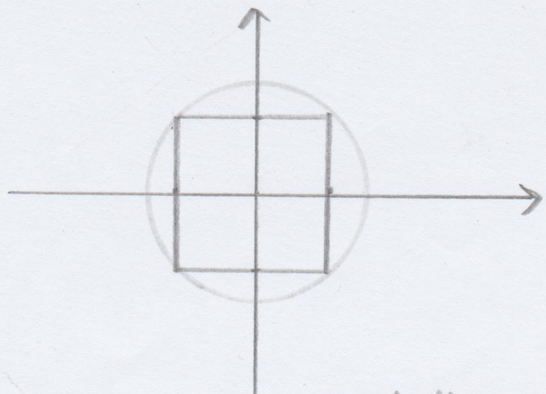
NB : Au départ, en 1938, Behrend montre que $\forall$ convexe compact d'intérieur $\neq \emptyset$, $\exists!$ ellipse inscrite d'aire maximale et $\exists!$ ellipse circonscrite d'aire minimale. Ces résultats ont ensuite été généralisés à $\mathbb{R}^n$ par JOHN et LOEWNER.

♣ Charles LOEWNER (1893 – 1968) est un mathématicien d'origine tchèque. Son premier résultat scientifique fut la démonstration, en 1923, du premier cas non trivial de la conjecture de Bieberbach.

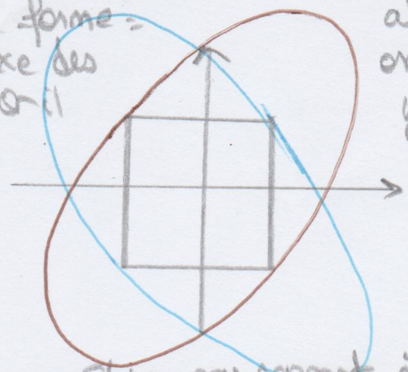
♣ Fritz JOHN (1910 – 1994) est un mathématicien allemand spécialisé dans les équations aux dérivées partielles. Ces travaux concernent la transformée de Radon et il est connu pour l'équation de John.

Application de l'ellipsoïde de John Loewner.

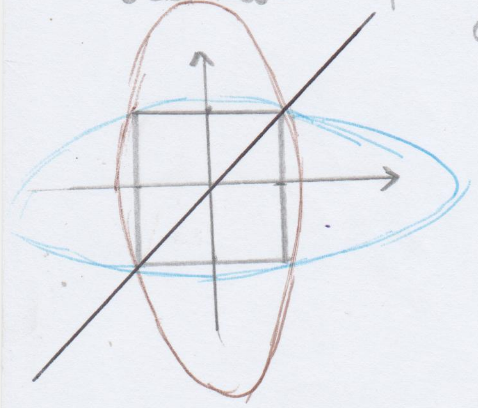
▶ Trouver l'ellipsoïde de John-Loewner associée au carré unité centré en O.
C'est $B(0,1)$:



En effet, par symétrie du carré, si l'ellipsoïde est de la forme : alors son symétriq p/r à l'axe des ordonnées convient aussi. Or il y a unicité !?

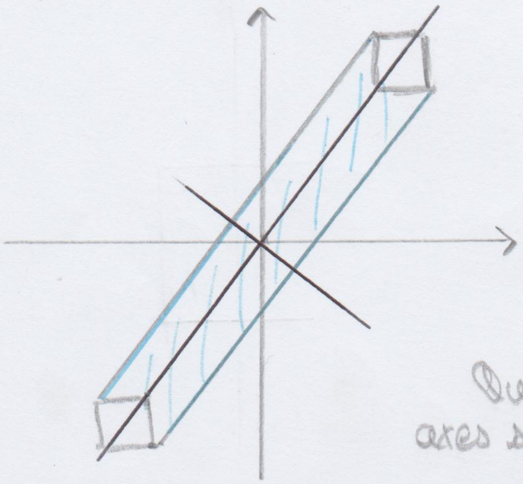


donc nécessairement l'ellipsoïde doit être symétriq par rapport à l'axe des abscisses, des ordonnées donc ses axes coïncident avec l'axe des abscisses et des ordonnées. En faisant la symétrie p/r la diagonale, on trouve :



donc toujours par unicité, on a une absurdité
donc on a nécessairement le cercle $B(0,1)$

▶ Trouver l'ellipsoïde de John-Loewner associée au carré unité qui n'est pas centré en O.



Si une ellipsoïde centré en O le contient alors elle contient (son enveloppe convexe) son symétriq p/r à l'origine.
L'ellipsoïde est convexe donc elle contient l'enveloppe convexe.
Par symétrie p/r aux deux droites noires, en faisant comme pour le carré centré, par unicité, les axes de l'ellipsoïde sont les axes noirs.
Quitte à faire une rotation, on se ramène au cas où les axes sont ceux du repère.
On est donc ramené à une ellipsoïde de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Il reste à déterminer a et b.
Or le volume de l'ellipsoïde est πab donc il est croissant en a et b donc on doit choisir a et b assez petits. Or $a \geq a_0$, $b \geq b_0$.
On fixe $a = a_0$ et on augmente b jusqu'à ce que × soient dedans. Reste à savoir si c'est vraiment la + petite...